UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO DE RÍO PIEDRAS
FACULTAD DE ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS

PO Box 21869 San Juan, Puerto Rico 00931-1869

FORUM
EMPRESARIAL

3 P T a

12 de abril de 2007

Dr. Moises Tacle
Rector
Campus Gustavo Galindo Velasco
Km. 30.5 Via Perimetral
Apartado: 09-01-5863
Guayaquil - Ecuador

Estimado doctor Tacle:

La Junta Editora de Forum Empresarial lo seleccionó para evaluar el artículo: *"Portafolio sustituto del activo de riesgo y del portafolio de mercado"*. Le invitamos a colaborar como evaluador anónimo de este artículo. En cada número de la Revista publicamos los nombres de los evaluadores y evaluadoras que colaboraron en la revisión de los artículos incluidos en ese número.

En su evaluación debe emplear los criterios para la evaluación de artículos establecidos por la Junta Editora de Forum Empresarial. Nos gustaría recibir su evaluación y comentarios para el 30 de abril de 2007.

Aprovechamos la ocasión para invitarle a publicar en nuestra Revista.

Cordialmente,

Milagros Miranda Díaz
Milagros Miranda Díaz
Coordinadora

MMD/jha

Anejos

Teléfono: 764-0000, Ext.. 2721, 3931 . Fax 787-772-1462
e-mail: cicia@uprrp.edu
e-mail: forum@uprrp.edu

Título Artículo: *Portafolio sustituto del activo de riesgo y del portafolio de mercado*

Recomiendo que:

_x__ ***Se publique el artículo tal como está.***

____ ***Se publique el artículo con las revisiones previamente indicadas.***

____ ***No se publique el artículo.***

Firma ***Fecha*** Abril 20/07

Portafolio sustituto del activo libre de riesgo y del portafolio de mercado.

Resumen

Jarrow (1988) plantea una visión alternativa al CAPM y a línea de Mercado de Capitales a partir de la definición de Markowitz (1958) de la frontera eficiente de Media-Varianza y con la misma metodología de M-V reelabora un test para medir frontera eficiente sin la existencia de activos sin riesgo. Elton y Gruber (1995) desarrollan la frontera eficiente con "ventas cortas". A partir de estos enfoques en este artículo se reelabora un concepto de Portafolio riesgoso sustituto que rinde una rentabilidad igual a la de un activo financiero sin riesgo. Se desarrollan unas proposiciones para construir un portafolio, que sea sustituto del activo libre de riesgo, pero formado por activos riesgosos y determinando las proporciones que se deben invertir para generar ese portafolio; de igual forma, se analiza la construcción de un portafolio sustituto del portafolio de mercado.

Palabras claves: Portafolio libre de riesgo, CAPM, Media-Varianza, Frontera Eficiente.

Abstract

A review of the traditional literature of the efficient frontier of mean-variance (MV) reveals the development of an alternative to CAPM and the Capital Market Line, the re-elaboration of a test to measure the efficient frontier without risk less assets, and the development of the efficient frontier with short sales. These perspectives let us re-elaborate the concept of a risky substitute portfolio that generates a profit equal to that of a risk less financial asset. This paper develops some propositions for the formation of a portfolio that can substitute for the risk less asset, but that is made up of risky assets and has set investment proportions. Likewise, the paper analyzes the creation of a substitute for the market portfolio.

Key words: Risk less asset, CAPM, mean-variance, efficient frontier

Portafolio sustituto del activo libre de riesgo y del portafolio de mercado

Introducción

El modelo CAPM está basado en lo que se denomina la *Línea del Mercado de Valores* (Security Market Line), sobre la que se ubican los títulos y que está representado por:

$$E(R_i) = R_F + \beta_i \left[E(R_m) - R_F\right] \quad \forall\, iEM$$

Donde: β_i= cov (R_i,R_m) /var(R_m), M es el *Portafolio de Mercado*. β_i es denominado *Beta del Activo* i, E (R_m) representa la R*entabilidad de un Portafolio de Mercado* y R_F es la *Tasa de Interés Libre de Riesgo*.

En una segunda etapa se desarrolla la *Línea del Mercado de Capitales* (Capital Market Line), la cual se obtiene invirtiendo un α% de los recursos en el P*ortafolio de Mercado* y (1-α) % en un activo sin riesgo, tal que la rentabilidad de este nuevo activo, es: R_i = (1-α) R_F + αE (R_m). Finalmente en equilibrio, el *Modelo Global* es el siguiente: E R_i) = R_F + (σ_i/σ_m) (E (R_m)-R_F) Donde:

σ_i = desviación estándar de la rentabilidad del activo i.

σ_m = desviación estándar de la rentabilidad del portafolio de mercado.

En un trabajo de Black (1972), se demostró que el modelo se cumple aún sin la existencia del activo sin riesgo. Este activo se puede definir como un activo con β= 0. En el modelo, también se define el portafolio de mercado, como un portafolio tal que el porcentaje de los activos riesgosos j, para j =1,.... k que tiene un Beta = 1 satisface la siguiente relación (Jarrow, 1988):

$$P_m = \left[\sum \tilde{N}_j^i\right] p(x_j) / \sum_{k=1}^{k} \left[\sum \bar{x}_k^0\right] p(x_k)$$

$$donde \quad \sum_{j=1}^{k} P_{mj} = 1$$

Así, pues, CAPM requiere de activos sin riesgo, (o sea con $\beta = 0$) y activos del portafolio de mercado (o sea con $\beta = 1$) que son activos riesgosos. En este artículo se mostrará que puede existir un portafolio con una definición diferente del P*ortafolio Libre de Riesgo* y del P*ortafolio de Mercado,* los cuales pueden ser sustituidos por otros portafolios equivalentes.

Portafolio sustituto de activo libre de riesgo

Jarrow (1988) plantea una visión alternativa al CAPM y a la línea del *Mercado de Capitales* a partir de la definición de Markowitz (1958) de la Frontera Eficiente de Media-Varianza (M-V) y con la misma metodología de M-V reelabora la Línea del Mercado de Capitales usando optimización no lineal, lo que genera un enfoque interesante. Kandel (1984) elabora un test para medir la *Frontera Eficiente* sin la existencia de activos sin riesgo. Elton y Gruber (2000) desarrollan el caso de F*rontera Eficiente*, a base de "ventas cortas" y en el que se describen métodos clásicos para su determinación. A partir de estos enfoques, en este artículo se reelaborará el concepto *de un portafolio sustituto* que rinde una rentabilidad equivalente a la libre de riesgo. Este artículo, tiene como base metodológica el desarrollo del Modelo de Mercado inicial de Sharpe (1964, 1970). Para el desarrollo de la misma se hará uso de las siguientes proposiciones:

Proposición I

Se puede formar un portafolio que rinde una rentabilidad equivalente al de un *Activo sin* R*iesgo,* mediante la mezcla de activos riesgosos, este nuevo portafolio tiene cero riesgos. Este porfolio está formado por un activo riesgoso y se financia con recursos propios y con préstamos o "venta corta".

Para demostrar las proposiciones siguientes se asume que se cumplen los supuestos de CAPM, M-V y que existe posibilidad de efectuar "ventas cortas".

Demostración:

a) Nuevo Portafolio con activos riesgosos

Existen dos activos riesgosos 1 y 2 con las siguientes condiciones:

a.1) Estos activos en equilibrio, (o sea están ubicados exactamente sobre la *Línea del Mercado de Valores*), tienen las siguientes rentabilidades, Jarrow, op.cit. Pág. 223:

$E(R_1) = R_F + \beta_1 [E(R_m) - R_F]$

$E(R_2) = R_F + \beta_2 [E(R_m) - R_F]$

a.2) Cuando los dos activos están en equilibrio, (o sea sobre la *Línea del Mercado*), sus riesgos respectivos son los siguientes:

$$\sigma_1^2 = \beta_1^2 \sigma_m^2 \quad y \quad \sigma_2^2 = \beta_2^2 \sigma_m^2$$

a.3) Cuando los dos activos están en equilibrio, (Ver Apéndice 1) las relaciones entre las covarianzas de las rentabilidades $\sigma_{1,2}$ de los dos activos y los betas del modelo CAPM, son las siguientes:

$\sigma_{1,2} = (\beta_2/\beta_1) / \sigma^2_1 = (\beta_1\beta_2\sigma_m^2)$

donde σ^2_m = Varianza del portafolio de mercado.

Con esos dos activos se puede formar un portafolio, invirtiendo x_1 y x_2, tal que $x_1+x_2=1$ y siguiendo al Modelo M-V, se puede minimizar su riesgo, σ^2_c, o sea:

$$\sigma_c^2 = (\beta_1\sigma_m)^2 x_1^2 + (1-x_1)^2(\beta_2\sigma_m)^2 + 2x_1(1-x_1)(\beta_1\beta_2)\sigma_m^2 \qquad (1)$$

Resolviendo las condiciones de Primer Orden $\partial\sigma^2_c/\partial x_1 = 0$, y haciendo trabajo algebraico (Ver Apéndice 2) se obtienen las siguientes proporciones:

$$x^*_1 = \beta_2/(\beta_2 - \beta_1) \qquad (2)$$

$$x^*_2 = -\beta_1/(\beta_2 - \beta_1) \qquad (3)$$

El portafolio formado con las proporciones x^*_1 y x^*_2 tiene las siguientes características en Rentabilidad esperada $E(R_c)$ y riesgo σ^2_c :

$$E(R_c) = [R_F + \beta_1(E(R_m) - R_F)]\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\right) - [R_F + \beta_2(E(R_m) - R_F)]\left(\frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\right)$$

Ordenando, se demuestra que:

$E(R_c) = R_F$ y

$$\sigma_c^2 = (\beta_1\sigma_m)^2[\beta_2/(\beta_2 - \beta_1)]^2 + (\beta_2\sigma_M)^2[-\beta_1/(\beta_2 - \beta_1)]^2 - 2[(\beta_1\beta_2)/(\beta_2 - \beta_1)^2](\beta_1\beta_2\sigma_M^2)$$

Por reducción algebraica se demuestra que: $\sigma^2_c = 0$

Así, un portafolio formado por los activos 1 y 2 e invirtiendo x^*_1 y x^*_2 en cada uno tiene una rentabilidad esperada de R_F y un riesgo $\sigma^2_c = 0$, o sea genera una rentabilidad equivalente a una tasa libre de riesgo y con cero riesgo, que es equivalente a invertir todos los recursos propios en un activo libre de riesgo.

b) Inversión y Financiamiento:

De x^*_1 y x^*_2 se observa que necesariamente si $x^*_1 > 1 \Rightarrow x^*_2 < 0$ o si $x^*_1 < 0 \Rightarrow x^*_2 > 1$. Entonces para cualquier $x^*_1 > 1$, implica que se invertirá una proporción mayor de los recursos que se tienen, así se puede resumir:

$x^*_1 > 1 \Rightarrow x^*_2 < 0$ ó $x^*1 < 0 \Rightarrow x^*_2 > 1$

Como se sabe que $x_1 + x_2 = 1$ y si $x^*_1 > 1$ y $x^*_2 < 0$, entonces se cumple: $x^*_1 = x^*_2 + 1$, que indica que se invierte en el activo riesgoso x^*_1 y se financia con un préstamo (o "venta corta") con x^*_2 y con una unidad de Capital Propio. En este caso x^*_2 indica las veces que se debe endeudar (o hacer venta corta) por cada unidad de recursos propios.

Supongamos que el inversionista tiene $C, entonces la igualdad, se transforma en lo siguiente:

$x^*_1C = x^*_2C + C$, o sea: Inversión = Financiamiento

Resumiendo:

Inversión: x^*_1

Financiamiento:

Préstamo (o "venta corta"): x^*_2

Recursos Propios: 1

El préstamo (o "venta corta") se efectúa a una tasa riesgosa igual a: $R_F + \beta_2 [E(R_m)-R_F]$; la inversión en el activo 1 genera una rentabilidad de: $R_F + \beta_1[E(R_m) - R_F]$. Suponga que se tienen los recursos propios por un total (en moneda) de \$C. Entonces, la ganancia por invertir en un activo libre de riesgo es $\$R_F C$.

El Portafolio sin riesgo equivalente a invertir recursos en un activo libre de riesgo, estará conformado de la siguiente manera:

	Proporción	Moneda
Inversión	x^*_1	$x^*_1 C$
Financiamiento		
Préstamo o Venta Corta	x^*_2	$x^*_2 C$
Recursos Propios	1	C

Ganancia Inversión en Activo 1 $= x^*_1[R_F+\beta_1(E(R_m)-R_F)]$

Costo Financiamiento $= x^*_2 [R_F+\beta_2 (E(R_m)-R_F)]$

Reemplazando los valores de x^*_1 y x^*_2 por $x^*_1 = \beta_1/(\beta_2-\beta_1)$ y $x^*_2 = -\beta_2/(\beta_2-\beta_1)$, se tiene:

Utilidad Neta = Ganancia inversión – Costo financiamiento = R_F

Un caso particular de x^*_1 y x^*_2, que se deduce de las ecuaciones (2) y (3) es que si un activo i, tiene $\beta_i = 0$, entonces $x^*_1 = 1$, que es la definición de un A*ctivo Libre de Riesgo* y coincide con el punto mínimo de la línea del Mercado de Capitales (Capital Market Line). Lo que se demuestra en esta primera proposición es que no es necesario la existencia de un activo β_i=0, sino que se puede reemplazar por un portafolio alternativo invirtiendo x^*_1, en activo riesgoso financiándolo con préstamo o venta corta más Capital Propio lo que genera la misma rentabilidad del activo libre de riesgo y con un riesgo nulo.

Para aclarar el caso anterior, se toman dos activos riesgosos con $\beta_1 = 0.45$ y $\beta_2 = 0.65$ y se tienen recursos propios por $500 ¿cuál es el portafolio equivalente al de un *Activo Libre de Riesgo*? Se supone una $R_F = 0.10$ y E $(R_m) = 0.15$. Reemplazando en ecuaciones (2) y (3) se tiene:

$x^*_1 = 0.65/(0.65-0.45) = 3.25$ $\quad\quad$ $x^*_2 = -0.45/(0.65-0.45) = -2.25$

Lo anterior indica que por cada $1 de recursos propios, se debe pedir préstamo (o hacer "venta corta") por 2.25 veces para lograr invertir 3.25 en un activo riesgoso y obtener una tasa de rentabilidad igual a la tasa libre de riesgo. En el siguiente cuadro se presenta esta situación.

Significado:	Título	Proporción	$
Inversión:	1	3.25	$1,625
Financiamiento Préstamo:	2	2.25	$1,125
Financiamiento Recursos Propios:		1	$ 500
Financiamiento total:		3.25	$1,625

Cash Flow (in) por Inversión: 1.625 [0.10 + 0.45(0.15-0.10)] = $199, 0625.
Cash Flow (out) por Financiamiento: 1.125 [0.10 + 0.65 (0.15-0.10) = $149, 0625.
Cash Flow (neto): $199, 0625 - $149,0625 = $50

Rentabilidad por Recursos Propios = *Cash Flow* neto/Recursos Propios = $50/500=0.10=$R_F$

Es decir, el *Portafolio Alternativo* proporciona la misma rentabilidad libre de riesgo, que si el inversionista invierte sus $500 inicial a 10%. En el ejemplo, la inversión de x_1 genera una rentabilidad de 12.25% y el financiamiento externo (x_2) tiene un costo de 13.25%.

II. Portafolio sustituto del portafolio de mercado

Proposición II

Se pueden formar portafolios de mercados alternativos con activos riesgosos, con betas diferentes a uno, que proporcionan el mismo riesgo e igual rentabilidad que un portafolio de mercado con $\beta = 1$, según la línea del Mercado de Valores.

Demostración

a) Portafolios alternativos de mercado.

Se toman los mismos supuestos de Proposición I. En este caso se exige que: $x_1 E(R_1) + (1-x_1) E(R_2) = E(R_m)$, donde $E(R_i)$ = Rentabilidad esperada, en equilibrio según CAPM, del activo riesgoso i, $E(R_m)$ = Rentabilidad esperada de un Portafolio de mercado y x_i = Proporción a invertir en un activo riesgoso i y que tiene un β_i conocido.

De acuerdo con los datos anteriores, se pretende formar un nuevo portafolio que tenga el mínimo riesgo para la rentabilidad de mercado esperada; lo que matemáticamente implica lo siguiente:

$$MIN\ L = x_1^2(\beta_1\sigma_m)^2 + (1-x_1)^2(\beta_2\sigma_m)^2 + 2x_1(1-x_1)\beta_1\beta_2\sigma_m^2 + \lambda\left[(R_m) - x_1E(R_1) - (1-x_1)E(R_2)\right]$$

Resolviendo: $\partial\sigma^2_c/\partial x_1=0$ y $\partial\sigma^2_c/\partial\lambda=0$, y haciendo arreglos algebraicos (Ver Apéndice 3) se obtienen los siguientes resultados para x_1 y x_2:

$$x^*_1 = (\beta_2-1)/(\beta_2-\beta_1) \qquad (5)$$

$$x^*_2 = (1-\beta_1)/(\beta_2-\beta_1) \qquad (6)$$

Si se forma un Portafolio con x^*_1 y x^*_2, se obtiene la siguiente rentabilidad (E (Rc)) y el siguiente riesgo σ^2_c:

$$E(R_c) = [R_F + \beta_1(E(R_m) - R_F)](\beta_2 - 1)/(\beta_2 - \beta_1) + [R_F + \beta_2(E(R_m) - R_F)](1 - \beta_1)/(\beta_2 - \beta_1)$$

Ordenando se tiene: E (R_c) = E (R_m) y

$$\sigma_c^2 = \left(\frac{\beta_2 - 1}{\beta_2 - \beta_1}\right)^2 (\beta_1\sigma_m)^2 + \left(\frac{1 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\right)^2 (\beta_2\sigma_m)^2 + 2\left(\frac{\beta_2 - 1}{\beta_2 - \beta_1}\right)\left(\frac{1 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\right)(\beta_1\beta_2\sigma_m^2)$$

Ordenando, se tiene: $\sigma^2{}_c = \sigma^2{}_m$

Es decir, el nuevo Portafolio formado por $x^*{}_1$ y $x^*{}_2$, tiene un retorno esperado igual al de un Portafolio de Mercado, E (R_m), y con el mismo riesgo que ese Portafolio, o sea $\sigma^2{}_m$.

En (5) y (6) se observa que si $\beta_i = 1$, es un caso particular de (5) y (6). En este punto coincide exactamente la *Línea del Mercado de Valores* con *la Frontera Eficiente*.

b) Inversión y Financiamiento del Portafolio Alternativo

b.1. Inversión y Recursos Propios

Si $0<x^*{}_1<1 \Rightarrow 0<x^*{}_2 < 1$

Se cumple cuando $\beta_2 > \beta_1$, $\beta_2 > 1$ y $\beta_1 < 1$

En este caso se invierte en $x^*{}_1$ y $x^*{}_2$ y se financia todo con recursos propios. Si se tiene \$C de recursos propios, entonces la inversión en el título 1 es:

$[(\beta_2 - 1) / (\beta_2 - \beta_1)]C$ y en el título 2 es: $[(1-\beta_1) / (\beta_2 - \beta_1)]C$ con una rentabilidad esperada de $E(R_c) = E(R_m)$ y con un riesgo total de $\sigma^2{}_c = \sigma^2{}_m$, o sea con una rentabilidad igual a la rentabilidad de un portafolio de mercado y con un riesgo equivalente al riesgo de un portafolio de mercado $\sigma^2{}_m$.

b.2.- Inversión y Financiamiento con préstamo (o venta corta) y recursos propios.

Se pueden presentar, dependiendo del valor de los Beta de cada activo, las siguientes situaciones: $x^*{}_1 > 1 \Rightarrow x^*{}_2 < 0$ ó $x^*{}_1 < 0 \Rightarrow x^*{}_2 > 1$

En cualquiera de los dos casos, el portafolio que obtenido tiene las siguientes relaciones:

$x^*_1 = x^*_2 + 1$ sí $x^*_1 > 1$ y $x^*_2 < 0$

ó $x^*_2 = x^*_1 + 1$ sí $x^*_1 < 0$ y $x^*_2 > 1$

En general, sí: $x^*_i = x^*_j + 1$, esto indica que se invierte una proporción de x^*_i en el activo i generando una rentabilidad de $R_F + \beta_i$ [E (R_m)-R_F]. Esta inversión se financiará con recursos propios, por una unidad, y el resto se financiará con un préstamo o venta corta en una proporción x^*_j que tiene un costo de: $R_F + \beta_j$ [E (R_m)-R_F]. Este portafolio genera una rentabilidad de E (R_m) con un riesgo de σ^2_m.

En efecto: sustituyendo los valores de x^*_1 y x^*_2 en la función de rentabilidad del nuevo portafolio, se tiene:

$$E(R_c) = \left(\frac{\beta_2 - 1}{\beta_2 - \beta_1}\right)[R_F + \beta_1(E(R_m) - R_F)] + \left(\frac{1 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\right)[R_F + \beta_2(E(R_m) - R_i)]$$

Haciendo arreglos, se tiene: E (R_c) = E (R_m). Respecto al riesgo se tiene: $\sigma^2_c = \sigma^2_m$

Mediante la operación anterior se demuestra que un portafolio formado por una inversión en el título 1, financiado con préstamo y recursos propios, tiene un riesgo de σ^2_m y una rentabilidad de E (R_m), lo que es equivalente a invertir sólo los recursos propios en un portafolio de mercado con $\beta = 1$, financiado con recursos propios.

Para aclarar el caso anterior se presenta el siguiente ejemplo: Se tienen dos activos con $\beta_1 = 0.4$ y $\beta_2 = 0.6$. Se tienen recursos propios por \$1,500. El portafolio alternativo al Portafolio de Mercado se calcula de la siguiente forma:

Reemplazando los valores de β_1 y β_2 en (5) y (6) se obtienen las siguientes proporciones:

$$x^*_2 = \frac{1 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{1 - 0.4}{0.6 - 0.4} = 3$$

Lo anterior indica que se debe invertir en el activo 2, financiando con préstamo del activo 1

$$x^*_1 = \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{0.6 - 1}{0.6 - 0.4} = -2 \quad y$$

y con recursos propios, o sea:

	Proporción	**Moneda**	
Inversión en Activo 2	3	$4,500	
Financiamiento			
Venta corta Activo 1	2	$3,000	
Recursos propios	1	$1,500	
Total Financiamiento	3	$4,500	
Cash Flow (in) por Inversión		= 4,500 [0.10+0.6 [0.15-0.10]]	= $585
Cash Flow (out) por Financiamiento		= 3,000 [0.10+0.4 (0.15-0.10)]	= $360
Cash Flow Neto			= $225

$$\text{Re}\textit{ntabilidad de } \text{Re}\textit{cursos } \text{Pr}\textit{opios} = \frac{\$225}{\$1500} = 0.15 = E(R_m)$$

El riesgo de este portafolio es:

$\sigma^2_c = (-2)^2(0.4\ \sigma_m)^2 + (3)^2\,(0.6\ \sigma_m)^2 + 2(-2)(3)(0.4)(0.6)\ \sigma^2_m$

$\sigma^2_c = \sigma^2_m$

Si hubiese invertido directamente los $1500 de recursos propios en un portafolio de Mercado, o sea con $\beta = 1$, su ganancia en $, habría sido 1500 [0.10 + (0.15-0.10)] = $225, que es equivalente al portafolio de mercado alternativo que se ha calculado usando (5) y (6).

Iii.- frontera eficiente y línea de mercado de capitales (capital market line): Caso general

Las dos proposiciones anteriores son casos particulares de una situación más general que consiste en determinar los portafolios alternativos, con cualquier Betas, y no cero o uno como se establece inicialmente para un activo libre de riesgo y un portafolio de mercado respectivamente. En un planteamiento más general Brennan (1971) hizo un enfoque con la formación de carteras con préstamos a diferentes tasas de interés y en las cuales hace uso del concepto frontera eficiente. En un trabajo análogo, Jarrow (1988), hace un enfoque de frontera eficiente y su relación con CAPM a través de Teoremas. Ambos enfoques tienen la característica de unir los dos modelos.

En este artículo, se han buscado los portafolios alternativos, pero tanto Jarrow como Sharpe demuestran que los portafolios de mercados están en la frontera eficiente y por lo tanto, es también un portafolio eficiente que es la metodología seguida en este artículo. Frente a lo expuesto anteriormente, se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Existe para cualquier portafolio eficiente, un punto de tangencia con la Línea del Mercado de Capitales? Siguiendo el esquema metodológico de las proposiciones I y II, la respuesta es afirmativa, la demostración se presenta a continuación:

Se trata de formar portafolios con dos activos con $\beta \neq 0$ y $\beta \neq 1$ sujetos a una rentabilidad deseada R_d por el inversionista. Siguiendo las condiciones de Lagrange, la función a minimizar es:

$$L = x_1^2(\beta_1\sigma_m)^2 + (1-x_1)^2(\beta_2\sigma_m)^2 + 2x_1(1-x_2)\beta_1\beta_2\sigma_m^2 + \lambda[R_d - x_1R_1 - (1-x_1)R_2]$$

Donde se dan los mismos supuestos de proposición I y II.

Usando las condiciones de minimización de Primer Orden, se tiene:

$$\partial L/\partial x_1 = 2x_1\sigma_m^2[\beta_2 - \beta_1]^2 + \lambda[R_2 - R_1] - 2\sigma_m^2\beta_2(\beta_2 - \beta_1) = 0$$

$$\partial L/\partial \lambda = R_d - x_1R_1 + x_1R_2 - R_2 = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones simultáneas (Ver, Apéndice 4) se obtienen los siguientes resultados.

$$x_1' = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} - \frac{(R_d - R_F)}{(R_m - R_F)} \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)} \qquad con\ \beta_1 \neq \beta_2\ y\ R_m \neq R_F \qquad (6)$$

$$x_2' = \frac{-\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{(R_d - R_F)}{(R_m - R_F)} \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)} \qquad (7)$$

El resultado anterior indica que siguiendo una estrategia de inversión ya sea en el activo 1 o en el activo 2, uno con β_1 y β_2, respectivamente que genera una rentabilidad de $R_F + \beta_k(E(R_m) - R_F)$ financiado con recursos propios y con ventas cortas a un costo de $R_F + \beta_i(E(R_m) - R_F)$, entonces dichos portafolios están tanto ubicados sobre la frontera eficiente, como en la *Línea del Mercado de Capitales*, y este nuevo portafolio tiene una rentabilidad deseada de R_d y con un riesgo mínimo.

Para saber que la solución (6) y (7) está en la frontera eficiente, se debe probar que el riesgo de este portafolio es mínimo y único y ello es así pues se cumple que $\partial^2 L/\partial x^2_1 > 0$, por lo que el punto calculando $\partial^2 (x'_1, x'_2)$ es mínimo.

Para demostrar si tal portafolio está en la Línea del Mercado de Valores (LMV), se debe probar si este portafolio proporciona la misma rentabilidad deseada R_d y el mismo riesgo que el Portafolio en la *Frontera Eficiente*.

Demostración:

Se sabe que la rentabilidad en LMV $R_j = R_F + \frac{\sigma_j}{\sigma_m} E(R_m - R_F)$ es :

Donde σ_j = Desviación Estándar del portafolio alternativo formado por las proporciones x'_1 y x'_2 o sea:

$$\sigma_j^2 (x_1')^2 (\beta_1 \sigma_m)^2 + (1 - x_1')^2 (\beta_2 \sigma_m)^2 + 2 x_1' (1 - x_1') \beta_1 \beta_2 \sigma_m^2$$

Reemplazando, el valor de x'_1 y x'_2, y haciendo operaciones algebraicas, se tiene:

$$\sigma_j = \sigma_m \left(\frac{R_d - R_F}{R_m - R_F} \right) \qquad y$$

Reemplazando en la LMV, se tiene:

$$R_j = R_F + \frac{\sigma_m}{\sigma_m}\frac{(R_d - R_F)}{(R_m - R_F)}(R_m - R_F)$$

O sea $R_j = R_d$, que a la vez es igual a la rentabilidad obtenida en el Portafolio, pero en la *Frontera Eficiente*. Por lo tanto, ya sea usando la *Frontera Eficiente o la LMV*, se tiene que el portafolio alternativo invirtiendo y financiándolo con préstamo o venta corta, y si se cumple CAPM, entonces éste tiene la misma rentabilidad y el mismo riesgo. Es decir, *Frontera Eficiente y LMV* conducen a la misma conclusión.

Obsérvese, además, que en x'_1 y x'_2 sí $R_d = R_F$ se llega a la misma conclusión que la Proporción I, es decir, que la rentabilidad deseada del portafolio es igual a la tasa libre de riesgo. Ahora, si $R_d = R_m$, se llega a la Proposición II, de ahí que este planteamiento con rentabilidad deseada sea el caso general y las proposiciones I y II sean casos particulares. Por otro lado, de las expresiones generales de x_1' y x_2' se observa que las definiciones de Portafolio libre de riesgo con Beta = 0, es un caso muy particular, al igual que considerar a un Portafolio de Mercado con $\beta = 1$. Ambos portafolios pueden ser formados con $\beta \neq 0$ y $\beta \neq 1$ y se consiguen los mismos resultados que es lo que se deduce de este trabajo.

Iv. Inversión y financiamiento del nuevo portafolio

En la proposición II se demostró que el nuevo portafolio puede tener un activo, financiándolo ya sea con un préstamo o con "venta corta", a partir de la identidad Inversión = Financiamiento, la que se descompone en:

Inversión (en Activo 1 ó 2) = Préstamo (o venta corta) + Capital Propio.

Si se dispone de $C de Capital Propio, entonces se pueden presentar las siguientes tres situaciones:

a) $0 < x_1' < 1$ y $0 < x_2' < 1$

En este caso:

Inversión (en $): $x_1'C + x_2'C$

Financiamiento (en $): C

O sea: $x_1' C + x_2' C = C$

b) $x_1' > 1$ y $x_2' < 0$

En este caso:

Inversión (en $): $x_1' C$

Financiamiento (en $): $x_2' C + C$

O sea $x_1' C = x_2' C + C$

c) $x_1' < 0$ y $x_2' > 0$

En este caso:

Inversión (en $): $x_2' C$

Financiamiento (en $): $x_1' C + C$

O sea $x_2' C = x_1' C + C$

Tanto la rentabilidad de las inversiones, como el costo del Financiamiento, será el siguiente:

La rentabilidad de la Inversión en activo i es: $R_F + \beta_i(E(R_m) - R_F)$ i = 1 ó 2

El costo del Financiamiento por activo k es: $R_F + \beta_k(E(R_m) - R_F)$ k = 1ó 2

Rentabilidad del Capital Propio: R_d

Las tres situaciones anteriores se derivan directamente de la relación $x_1 + x_2 = 1$ ya que si $x_1 > 1$ y $x_2 < 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + 1$; ó $x_1 < 0$ y $x_2 > 1 \Rightarrow x_2 = x_1 + 1$

Es evidente que el portafolio alternativo se puede ampliar para i =1, .. k; en tal caso la

$$L = \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \beta_i^2 + 2\sigma_m^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_i x_j \beta_i \beta_j + \lambda \left[R_a - \sum_{i=1}^{k} x_i R_i \right]$$

función de Lagrange se debe plantear de la siguiente forma:

Las situaciones anteriores se pueden clarificar con el siguiente ejemplo: Existen dos activos riesgosos en los cuales se pueden invertir o hacer ventas cortas. Los datos que se conocen son los siguientes: $\beta_1 = 0.4$; $\beta_2 = 0.6$; $R_m = 0.10$; $R_F = 0.07$; $\sigma^2_m = 0.10$

Si el inversionista desea una rentabilidad de un 11%, ¿Cómo se forma este portafolio con estos dos títulos y cómo se financia, suponiendo que se dispone de $1,000?

Se pueden obtener los valores de x'_1 y x'_2 reemplazando en (6) y (7).

$$x'_1 = \frac{0.6}{0.2} - \frac{(0.11-0.07)}{(0.10-0.07)} \cdot \frac{1}{0.2} = -3.66666$$

Se invierte en x'_2 y se financia con x'_1 más los recursos propios, es decir:

Inversión:	$1000 x 4.6666 = $4,666.66
Financiamiento:	
Préstamo (o venta corta)	$ 1000x 3.6666 = $3,666.66
Recursos Propios	$1.000
Total	$4.66666

La rentabilidad obtenida en la inversión en el activo 2 es la siguiente:

El Costo del Financiamiento es el siguiente:

$$\$3,666.66[.07 + 0.4(0.10 - 0.07)] = \$300.66$$

Resultado neto: $410,666 - $300,666 = $110

Como los recursos propios son de $1,000 entonces estos recursos obtienen una rentabilidad de 11%, que es la rentabilidad deseada por el inversionista. El riesgo de esta inversión es $\sigma^2 = 1.7777\sigma^2_m = 0.1777$ que se obtiene reemplazando los valores de x'_1 y x'_2 en la función de riesgo.

En el ejemplo se pueden simular diferentes rentabilidades deseadas, para calcular las proporciones adecuadas; al igual que sucede cuando $R_d = R_F = 0.07$ ó

$R_m = R_F = 0.10$.

Sí se calcula la LMV, la rentabilidad de este portafolio, será la siguiente:

$$R_k = R_F + \frac{\sqrt{\sigma_k^2}}{\sqrt{\sigma_m^2}}(R_m - R_F)$$

Donde $\sqrt{\sigma_k^2 / \sigma_m^2} \;=\; \sqrt{1{,}777\sigma_m^2 / \sigma_m^2} = 1.3333$

Aquí, tal como se indicó, ya sea por el Cálculo a través de la frontera eficiente o por el

$$R_k = 0.07 + 1.3333(0.10 - 0.07) = 0.11$$

cálculo de la LMV, la Rentabilidad es un 11% que corresponde a la rentabilidad esperada.

Conclusiones

De las proposiciones presentadas y demostradas en este artículo, se infiere que la situación inicial del CAPM de considerar que el activo libre de riesgo tiene por base que éste es un activo sólo válido cuando tiene un *Beta Unitario*, es decir sólo existiría la posibilidad de tener un activo libre de riesgo. También se infiere que no es necesaria la existencia de activos financieros con Betas = 0, para que se siga cumpliendo el modelo original. De las proposiciones presentadas se muestra que dicho activo libre de riesgo puede ser substituido por portafolios que tienen *Betas* diferentes a uno, siendo lo más relevante que un activo libre de riesgo puede ser reemplazado por una combinación de activos riesgosos y que proporcionan, a la vez, un rendimiento igual al de un activo sin riesgo. Las observaciones efectuadas en este artículo, a partir de las proposiciones, permiten generalizar la definición de un activo libre de riesgo por una visión donde el activo sin riesgo tiene sustitutos, los cuales están formados por activos riesgosos y que entregan el mismo riesgo y el mismo rendimiento que el activo sin riesgo.

Bibliografía

Black, F. (1972) "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", Journal of Business 45, July 1972, 444-455.

Brennan, Michael J. (1971) "Capital Asset Market Equilibrium with Divergent Borrowing and Lending Rates", Journal of Financial and Quantitative Analysis", N° 5, Dec. Pp. 1197-1205.

Elton E. y Gruber, M. (1995), Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 5ta. Edition, Cap 9.

Elton E.; Gruber, M, Brown S. y William G. (2002). Modern Portfolio and Investment Analysis, Sixth Edition.

Jarrow, R. A. (1988), Finance Theory, Prentice -Hall International Editions, N.J.

Kandel, S. (1984) "The Likelihood Ratio Test Statistics of Mean- Variance Efficiency without a Riskless Asset". Journal of Financial Economic, 13,pp 575-592.

Markowitz, H. M. (1952) "Portfolio Selection", Journal of Finance, 7, 77-91.

Markowitz, H. M. (1987), Portfolio Selection, J. Wiley, N. York

Sharpe, W (1964) "Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", Journal of Finance, 19, pág.425-442.

Sharpe, W. (1970), Portfolio Theory and Capital Markets, McGraw-Hill, N York.

Apéndice 1
Relación entre σ_{ij} con β_{im} y β_{jm}

Para la función de riesgo de una cartera se necesita conocer $\sigma_{ij} = f(\beta_{im},\beta_{jm})$, donde:

σ_{ij} = Covarianza entre la Rentabilidad del activo i y la rentabilidad del activo j.

β_{km} = Coeficiente Beta entre la rentabilidad del activo k con la rentabilidad de un portafolio de mercado m, k=1,...j

Demostración:

Sean dos activos i y j, cuyas rentabilidades R_k tienen las siguientes relaciones:

$R_i = \alpha_i + \beta_{im}R_m$ (1)

$R_j = \alpha_j + \beta_{jm} R_m$ (2)

Donde R_m = Rentabilidad de un portafolio de mercado.

Para (1) y (2) se tiene:

$$R_m = \frac{R_i - \alpha_i}{\beta_{im}} \quad y \quad R_m = \frac{R_j - \alpha_j}{\beta_{jm}}$$

Igualando, se tiene:

$$\frac{R_i - \alpha_i}{\beta_{im}} = \frac{R_j - \alpha_j}{\beta_{jm}}$$

Despejando R_i se tiene:

$$R_i = \frac{\beta_{jm}\alpha_i - \beta_{im}\alpha_j}{\beta_{jm}} + \left(\frac{\beta_{im}}{\beta_{jm}}\right)R_j \qquad (3)$$

Se sabe que se puede establecer, de igual forma, una relación del tipo:

$$R_i = \alpha_o + \beta' R_j$$

Donde:

$$\beta' = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_j^2} \qquad (4)$$

De (3) sabemos que:

$$\beta' = \frac{\beta_{im}}{\beta_{jm}}$$

O $\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_j^2} = \frac{\beta_{im}}{\beta_{jm}}$ sea:

Despejando: $\sigma_{ij} = \frac{\beta_{im}}{\beta_{jm}} \sigma_j^2$

Por estar el título j en equilibrio, $\sigma_j^2 = \left(\beta_{jm}\sigma_m\right)^2$ entonces:

Por lo que se demuestra que: $\sigma_{ij} = \beta_{im}\beta_{jm}\sigma_m^2$

Apéndice 2
Cálculo de proporciones x_1 y x_2 que minimizan el riesgo de un portafolio de dos activos riesgosos

Se sabe que:

$$\sigma_c^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{12}$$

Donde σ_1^2 *y* σ_2^2 var*ianza de los retornos de los activos* 1 *y* 2, *respectivamente* σ_{12} = *Co*var*ianza de* Re*ntab. de tíulos* 1 *y* 2

Se sabe que:

$X_2 = x_1-1$	(por $x_1+x_2=1$)
$\sigma^2_1 = (\beta_1\sigma_m)^2$	(Por equilibrio, según CAPM)
$\sigma^2_2 = (\beta_2\sigma_m)^2$	(Por equilibrio, según CAPM)
$\sigma_{12} = \beta_1\beta_2\sigma^2_m$	(Por Apéndice 1)

Activo 1 y Activo 2 son dos activos riesgosos.
Entonces, la función a optimizar es:

$$\sigma_c^2 = x_1^2(\beta_1\sigma_m)^2 + (1-x_1)^2(\beta_2\sigma_m)^2 + 2x_1(1-x_1)\beta_1\beta_2\sigma_m^2$$

Usando, proceso de minimización, se tiene:

$$\frac{\partial\sigma_c^2}{\partial x_1} = 2x_1(\beta_1\sigma_m)^2 - 2(1-x_1)(\beta_2\sigma_m)^2 + 2(1-x_1)\beta_1\beta_2\sigma_m^2 - 2x_1\beta_1\beta_2\sigma_m^2 = 0$$

$$2\sigma_m^2x_1(\beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2) = 2\sigma_m^2(\beta_2^2 - \beta_1\beta_2)$$

Despejando para x_1, se tiene que x_1 óptimo (x^*_1) es:

$$x_1^* = \frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1} \quad con\ \beta_2 \neq \beta_1$$

Como $x_1+x_2 = 1$, entonces x_2 óptimo es:

$$x_2^* = \frac{-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} \quad con\ \beta_2 \neq \beta_1$$

Se comprueba que: $$\frac{\partial_2\sigma_c^2}{\partial x_1^2} = 2\sigma_m^2(\beta_1-\beta_2)^2 > 0$$

Entonces σ^2_c en (x^*_1, x^*_2) es un punto de mínimo.

Apéndice 3
Cálculo de portafolio alternativo de mercado, las proporciones a invertir y su financiamiento

Se sabe que:

$$L = x_1^2(\beta_1\sigma_m)^2 + (1-x_1)^2(\beta_2\sigma_m)^2 + 2x(1-x)\beta_1\beta_2\sigma_m^2 + \lambda[R_m - x_1R_1 - (1-x_1)R_2]$$

Donde: R_m = Rentabilidad de un portafolio de mercado, con un Beta cualquiera

λ = Multiplicador de Lagrange.

Se conservan los supuestos de Apéndice 2

Se trata de encontrar las proporciones x^*_1 y x^*_2 que forman un portafolio con mínimo riesgo y que tenga una rentabilidad equivalente a la Rentabilidad de un portafolio de mercado R_m.

Para ello, se procede calculando los multiplicadores de Lagrange. En efecto, las condiciones de Primer orden son las siguientes:

$$\partial L/\partial x_1 = 2x_1\sigma_m^2(\beta_2-\beta_1)^2 + \lambda[R_2 - R_1] - 2\sigma_m^2\beta_2(\beta_2-\beta_1) = 0$$

$$\partial L/\partial \lambda = x_1(R_2 - R_1) \quad - \quad (R_2 - R_m) = 0$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, se usa el siguiente procedimiento matricial:

x_1	λ	Constante
$2\sigma_m^2(\beta_2-\beta_1)^2$ $R_2 - R_1$	$R_2 - R_1$ 0	$2\sigma_m^2\beta_2(\beta_2-\beta_1)$ $R_2 - R_m$
1 0	$\dfrac{R_2-R_1}{2\sigma_m^2(\beta_2-\beta_1)^2}$ $\dfrac{-(R_2-R_1)^2}{2\sigma_m^2(\beta_2-\beta_1)^2}$	$\dfrac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}$ $\dfrac{-\beta_2(R_2-R_1)}{\beta_2-\beta_1} + (R_2 - R_m)$

A partir de la última matriz se plantea para x_1 y λ la siguiente relación:

$$x_1 + \lambda\left[\frac{R_2-R_1}{2\sigma_m^2(\beta_2-\beta_1)^2}\right] = \frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1} \qquad (1)$$

$$\lambda\left[\frac{-(R_2-R_1)^2}{2\sigma_m^2(\beta_2-\beta_1)^2}\right]=-\frac{\beta_2(R_2-R_1)}{\beta_2-\beta_1}+(R_2-R_m) \qquad (2)$$

Despejando λ de (2) y sustituyéndolo en (1), se obtiene el valor para x_1 el que es el siguiente:

$$x_1^* = \frac{R_2-R_m}{R_2-R_1} \quad con\ R_2 \neq R_1$$

Reemplazando las rentabilidades de los activos 1 y 2 por las obtenidas según CAPM, se tiene:

$$x_1^* = \frac{R_F+\beta_2[R_m-R_F]-R_m}{R_F+\beta_2[R_m-R_F]-R_F-\beta_1[R_m-R_F]}$$

Reduciendo queda:

$$x_1^* = \frac{\beta_2-1}{\beta_2-\beta_1} \quad con\ \beta_2 \neq \beta_1$$

Como $x^*_1 + x^*_2 = 1$, entonces

$$x_2^* = \frac{1-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} \quad con\ \beta_2 \neq \beta_1$$

Las condiciones de segundo orden implica que:

$$\partial_2 L(x_1) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2\sigma_M^2(\beta_2-\beta_1)^2 > 0,\ por\ lo\ tanto\ es\ un\ \text{mín}imo\ condicionado.$$

Apéndice 4

El planteamiento se obtiene directamente del Apéndice 3 reemplazando en el valor de x^*_1, el valor de R_m por R_d en x^*_1, o sea:

$$x'_1 = \frac{R_F + \beta_2[R_m - R_F] - R_d}{\beta_2[R_m - R_F] - \beta_1[R_m - R_F]}$$

Ordenando, se tiene:

$$x'_1 = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} - \frac{(R_d - R_F)}{(R_m - R_F)} \frac{1}{(\beta_2 \beta_1)} \quad con\ \beta_1 \neq \beta_2\ y\ R_m \neq R_F$$

Como $x'_1 + x'_2 = 1$, entonces x'_2 es:

$$x'_2 = \frac{-\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \frac{(R_d - R_F)}{(R_m - R_F)} \cdot \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1)}$$