SOLUCIONARIO DE
EJERCICIOS DE ALGEBRA LINEAL DE RAMIRO SALTOS

RESUELTO POR ALEX FERNAD   VERSIÓN 0.999999999 ...
ADVERTENCIA:
EL SIGUIENTE MATERIAL NO ES APTO PARA PRINCIPIANTES, SE RECOMIENDA PRECAUCIÓN.

1. Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Determine el subespacio generado por el conjunto $\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix} \right\}$. Encuentre una base y la dimensión de $\mathbf{H} = \mathbf{Gen(S)}$.

¿Porqué primero no hallamos una base de H, construyéndola a partir de elementos del generador? Al no ser $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ el uno múltiplo del otro, entonces son l.i.. Ahora, para ver si los tres vectores de S son l.i. usemos el criterio del determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$, entonces los tres vectores no son l.i.. Ok, entonces una base de H es $B_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim H = 2$ y $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Bigg/ \left| \begin{array}{lcl} x & = & \alpha_1 - \alpha_2 \\ y & = & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ z & = & 4\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{array} \right. , \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Sea $\mathbf{V} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R} \right\}$ un espacio vectorial junto con las operaciones:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{b_1} \\ \mathbf{c_1} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{a_2} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1 + a_2 + 2} \\ \mathbf{b_1 + b_2} \\ \mathbf{c_1 + c_2 - 1} \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{a} + \mathbf{2}\alpha - \mathbf{2} \\ \alpha\mathbf{b} \\ \alpha\mathbf{c} - \alpha + \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

a) **Determine una base y la dimensión de V.**

Uhm!, ese "$\mathbb{R}^3$" tiene la pinta de ser el producto[1] de tres espacios vectoriales: el espacio desplazado[2] $\mathbb{R}_{k=2}$ por $\mathbb{R}$ por el espacio desplazado $\mathbb{R}_{k=-1}$. ¿Porqué primero no hallamos una base de V, construyéndola a partir de los elementos de bases de los espacios que se están multiplicando? Al ser $0_{\mathbb{R}_{k=2}} = -2, B_{\mathbb{R}_{k=2}} = \{1\}$, $0_{\mathbb{R}} = 0, B_{\mathbb{R}} = \{2\}$, $0_{\mathbb{R}_{k=-1}} = 1, B_{\mathbb{R}_{k=1}} = \{3\}$, entonces una base de V es $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim V = 3$.

b) **Una base y la dimensión del subespacio $\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \mathbf{a + b + c = -1} \right\}$.**

¿Porqué no hallamos una base de H, construyéndola a partir de elementos no nulos que satisfagan el sistema de ecuaciones? Los vectores de V $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no son el uno "múltiplo[3]" del otro debido al espacio factor $\mathbb{R}$, ya que si lo fueran se tendría que $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \odot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix}$ lo cual es imposiblemente absurdo; con lo cual los dos vectores son l.i.. Por el momento $2 \leq \dim H \leq 3$, ahora $\dim H \neq 3$, ya que si lo fuera se tendría que $H = V$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in H$ lo cual es imposiblemente absurdo. Ok, entonces una base de H es $B_H = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim H = 2$.

[1] $V_1 \times \cdots \times V_n$: $0_{V_1 \times \cdots \times V_n} = 0_{V_1} \times \cdots \times 0_{V_n}$, $\tilde{x} = \tilde{x}_{V_1} \times \cdots \times \tilde{x}_{V_n}$, $B_{V_1 \times \cdots \times V_n} = B_{V_1} \times 0_{V_2} \times \cdots \times 0_{V_n} \bigcup \cdots \bigcup 0_{V_1} \times \cdots \times 0_{V_{n-1}} \times B_{V_n}$.
[2] $\mathbb{R}_k$: $x \oplus y = x + y + k$, $\alpha \odot x = \alpha x + k(\alpha - 1)$; $0_{R_k} = -k$, $\tilde{x} = -x - 2k$, $B_{\mathbb{R}_k} = \{x \ / \ x \neq 0_{R_k}\}$.
[3] $v_1 = \alpha \odot v_2$

3. Sea $\mathbf{V} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{u} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} / \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^+, \mathbf{b} \in \mathbb{R} \right\}$ **junto con las operaciones:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{u_1} \\ \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{u_2} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{u_1 + u_2} \\ \mathbf{a_1 a_2} & \mathbf{b_1 + b_2 + 2} \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{u} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \alpha\mathbf{u} \\ \mathbf{a}^\alpha & \alpha\mathbf{b} + \mathbf{2}\alpha - \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Encuentre una base y la dimensión de V.

Ah!, el 3 esta allí sin hacer nada; ajá, ese "V" tiene la pinta de ser el producto de tres espacios vectoriales: $\mathbb{R}^2$ por el espacio multiplicativo[4] $\mathbb{R}^+$ por el espacio desplazado $\mathbb{R}_{k=2}$. ¿Porqué primero no hallamos una base de V, construyéndola a partir de los elementos de bases de los espacios que se están multiplicando? Al ser $0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $0_{\mathbb{R}^+} = 1, B_{\mathbb{R}^+} = \{2\}$, $0_{\mathbb{R}_{k=2}} = -2, B_{\mathbb{R}_{k=2}} = \{3\}$, entonces una base de V es $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim V = 4$.

4. Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$**. Determine el valor de k para que el conjunto** $\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{k-1} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \right\}$ **sea una base de V.**

Usemos el criterio del determinante para ver cuando estos tres vectores son una base de $\mathbb{R}^3$. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & k-1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 2k - 4 \neq 0.$

Ok, entonces $B_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix} \right\}$ es una base de H solo cuando cuando $k \neq 2$.

5. Determine el subespacio generado por el conjunto de vectores dado.

a) $\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \right\}$ **en** $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$**.**

Bueno, como no piden nada especifico. Ok, entonces $Gen(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle/ \begin{array}{|lcl} x & = & 3\alpha_1 \\ y & = & 5\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ z & = & \alpha_1 + 3\alpha_2 \end{array} , \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

b) $\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \right\}$ **en** $\mathbf{V} = \mathcal{S}_{\mathbf{2\times 2}}$**.**

Bueno, como no piden nada especifico. Ok, entonces $Gen(H) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle/ \begin{array}{|lcl} a & = & \alpha_1 - 2\alpha_3 \\ b & = & 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ c & = & 5\alpha_3 \end{array} , \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

6. Sea H un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$**, generado por el conjunto** $\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} \right\}$**.**

a) **Determinar si** $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$**.**

b) **A partir de una base para H complete una base para** $\mathbb{R}^3$**.**

¿Porqué primero no hallamos una base de H, construyéndola a partir de elementos del generador? Al no ser $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ el uno múltiplo del otro, entonces son l.i.. Ahora, para ver si los tres vectores de S son l.i. usemos el criterio del determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, entonces los tres vectores no son l.i.. Ok, entonces una base de H es $B_H = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Ahora, $\dim H = 2$ y $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle/ \begin{array}{|lcl} x & = & \alpha_1 - \alpha_2 \\ y & = & -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ z & = & 4\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{array} , \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

7. Sea $\mathbf{V} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} / \mathbf{b} > \mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R} \right\}$ **un espacio vectorial, junto con las operaciones:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{c_1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} \\ \mathbf{c_2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1 + a_2 - 3} & \mathbf{b_1 b_2} \\ \mathbf{c_1 + c_2 - 7} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{3}\alpha + \alpha\mathbf{a} + \mathbf{3} & \mathbf{b}^\alpha \\ \mathbf{7}\alpha + \alpha\mathbf{c} + \mathbf{7} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}.$$

[4] $\mathbb{R}^+$: $x \oplus y = xy$, $\alpha \odot x = \alpha x^\alpha$; $0_{R^+} = 1$, $\tilde{x} = x^{-1}$, $B_{\mathbb{R}_k} = \{x \,/\, x \neq 1\}$.

a) **Determine una base y la dimensión de V.**
Ah!, el -2 esta allí sin hacer nada; ajá, ese "V" tiene la pinta de ser el producto de tres espacios vectoriales: el espacio desplazado $\mathbb{R}_{k=-3}$ por el espacio multiplicativo $\mathbb{R}^+$ por el espacio desplazado $\mathbb{R}_{k=7}$. ¿Porqué primero no hallamos una base de V, construyéndola a partir de los elementos de bases de los espacios que se están multiplicando? Al ser $0_{\mathbb{R}_{k=-3}} = 3, B_{\mathbb{R}_{k=-3}} = \{1\}$, $0_{\mathbb{R}^+} = 1, B_{\mathbb{R}^+} = \{2\}$, $0_{\mathbb{R}_{k=7}} = -7, B_{\mathbb{R}_{k=7}} = \{3\}$, entonces una base de V es $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim V = 3$.

b) **Una base y la dimensión del subespacio** $\mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \in \mathbf{V} \ / \ \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{4} = \mathbf{0} \right\}$.
¿Porqué no hallamos una base de W, construyéndola a partir de elementos no nulos que satisfagan el sistema de ecuaciones? Los vectores de V $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ no son el uno "múltiplo" del otro debido al espacio factor $\mathbb{R}^+$, ya que si lo fueran se tendría que $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \alpha \odot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & -2 \end{pmatrix}$ lo cual es imposiblemente absurdo; con lo cual los dos vectores son l.i.. Por el momento $2 \leq \dim W \leq 3$, ahora $\dim W \neq 3$, ya que si lo fuera se tendría que $W = V$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in W$ lo cual es imposiblemente absurdo. Ok, entonces una base de W es $B_H = \left\{ \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim H = 2$.

8. Sea $\mathbf{V} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{0} \end{pmatrix} / \mathbf{a} \in \mathbb{R}^+, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R} \right\}$ **un espacio vectorial, junto con las operaciones:**
$\begin{pmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{c_1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} \\ \mathbf{c_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1 a_2} & \mathbf{b_1 + b_2 + 7} \\ \mathbf{c_1 + c_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\alpha \odot \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\alpha & \alpha\mathbf{b} + \mathbf{7}\alpha - \mathbf{7} \\ \alpha\mathbf{c} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.
Determine una base y la dimensión de V.
Ah!, el 0 esta allí prácticamente sin hacer nada; ajá, ese "V" tiene la pinta de ser el producto de tres espacios vectoriales: el espacio multiplicativo $\mathbb{R}^+$ por el espacio desplazado $\mathbb{R}_{k=7}$ por $\mathbb{R}$. ¿Porqué primero no hallamos una base de V, construyéndola a partir de los elementos de bases de los espacios que se están multiplicando? Al ser $0_{\mathbb{R}^+} = 1, B_{\mathbb{R}^+} = \{2\}$, $0_{\mathbb{R}_{k=7}} = -7, B_{\mathbb{R}_{k=7}} = \{3\}$, $0_{\mathbb{R}} = 0, B_{\mathbb{R}} = \{4\}$, entonces una base de V es $B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim V = 3$.

E-mail address: fernad.alex@gmail.com