

Solución del Examen 1 de Ecuaciones diferenciales y álgebra lineal

1. **[20 puntos]** Demuestre que los polinomios $1, 1+x, 1+x^2$ y $1+x^3$ forman una base para el espacio $\mathcal{P}_3$ de los polinomios de grado ≤ 3 .

Solución. Sean $p_1(x) = 1, p_2(x) = 1+x, p_3(x) = 1+x^2$ y $p_4(x) = 1+x^3$, y

$$(1.1) \quad \mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\} = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}.$$

Queremos probar que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{P}_3$.

Parte (a). Probemos que $\text{gen } \mathcal{B} = \mathcal{P}_3$.

Si $p(x) \in \mathcal{P}_3$, entonces existen $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(1.2) \quad p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3.$$

Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ son de tal forma que

$$(1.3) \quad p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x).$$

Entonces,

$$(1.4) \quad a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x)$$

$$(1.5) \quad = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x^2) + \alpha_4(1+x^3)$$

$$(1.6) \quad = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2x + \alpha_3 + \alpha_3x^2 + \alpha_4 + \alpha_4x^3$$

$$(1.7) \quad = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \alpha_4x^3. \quad [5 \text{ puntos}]$$

Por tanto, es suficiente tomar

$$(1.8) \quad p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x).$$

Entonces,

$$(1.9) \quad \alpha_4 = a_4,$$

$$(1.10) \quad \alpha_3 = a_3,$$

$$(1.11) \quad \alpha_2 = a_2,$$

$$(1.12) \quad \alpha_1 = a_1 - a_2 - a_3 - a_4. \quad [5 \text{ puntos}]$$

Parte (b). Ahora probemos que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

Supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ son de tal forma que

$$(1.13) \quad \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x) = \mathbf{0}, \quad [5 \text{ puntos}]$$

donde $\mathbf{0}$ es el vector nulo de $\mathcal{P}_3$, es decir, el polinomio constante 0. Entonces,

$$(1.14) \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \alpha_4x^3 = 0.$$

De donde,

$$(1.15) \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \quad \blacksquare \quad [5 \text{ puntos}]$$

Nota 1.1. Observemos que para resolver la parte (b) podemos usar el wronskiano de $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$, así:

$$(1.16) \quad W(x) = \begin{vmatrix} p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) & p_4(x) \\ p_1'(x) & p_2'(x) & p_3'(x) & p_4'(x) \\ p_1''(x) & p_2''(x) & p_3''(x) & p_4''(x) \\ p_1'''(x) & p_2'''(x) & p_3'''(x) & p_4'''(x) \end{vmatrix}$$

$$(1.17) \quad = \begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1+x^2 & 1+x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(1.18) \quad = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(1.19) \quad = \begin{vmatrix} 2 & 6x \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(1.20) \quad = 12 \neq 0.$$

Nota 1.2. Una demostración diferente puede hacerse usando o bien la parte (a) y el teorema A, o bien la parte (b) y el teorema B, partiendo de que es conocido que $\dim \mathcal{P}_3 = 4$.

Teorema A. Sean V es un espacio lineal con $\dim V = n$ y $\mathcal{B} \subset V$ con n elementos. Si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, entonces $\mathcal{B}$ es una base para V .

Teorema B. Sean V es un espacio lineal con $\dim V = n$ y $\mathcal{B} \subset V$ con n elementos. Si $\text{gen} \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para V .

2. [20 puntos] Obtenga dos bases para $\mathbb{R}^4$ que tengan en común solamente los vectores $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1, 1)$.

Solución. Como $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, cualquier base de $\mathbb{R}^4$ tiene 4 elementos. Sean $A = (1, 1, 1, 0)$ y $B = (0, 1, 1, 1)$.

Parte (a). Notemos que

$$(2.1) \quad A - B = (1, 1, 1, 0) - (0, 1, 1, 1) = (1, 0, 0, -1).$$

Consideremos $C = (1, 0, 0, 0)$.

Por otro lado tenemos que

$$(2.2) \quad A + B - C = (1, 1, 1, 0) + (0, 1, 1, 1) - (1, 0, 0, 0) = (0, 2, 2, 0).$$

Ahora consideremos $D = (0, 1, 2, 0)$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ son de tal forma que

$$(2.3) \quad \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = \mathbf{0} \quad [5 \text{ puntos}]$$

significa que

$$(2.4) \quad (0, 0, 0, 0) = \alpha_1(1, 1, 1, 0) + \alpha_2(0, 1, 1, 1) + \alpha_3(1, 0, 0, 0) + \alpha_4(0, 1, 2, 0)$$

$$(2.5) \quad = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, 0) + (0, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, 0, 0, 0) + (0, \alpha_4, 2\alpha_4, 0)$$

$$(2.6) \quad = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_2). \quad [5 \text{ puntos}]$$

Así tenemos el sistema de ecuaciones

$$(2.7) \quad \alpha_1 + \alpha_3 = 0,$$

$$(2.8) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0,$$

$$(2.9) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0,$$

$$(2.10) \quad \alpha_2 = 0. \quad [5 \text{ puntos}]$$

Así que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. La independencia lineal de $\{A, B, C, D\}$ puede obtenerse directamente verificando que

$$(2.11) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Así que $\mathcal{B}_1 = \{A, B, C, D\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$.

Parte (b). Para obtener la otra base pedida consideremos

$$(2.12) \quad \mathcal{B}_1 = \{A, B, -C, -D\}. \quad \blacksquare \quad [5 \text{ puntos}]$$

Nota 2.1. Un argumento similar al del ejercicio 2 puede hacerse usando o bien el teorema A, o bien el teorema B, partiendo de que es conocido que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

3. [20 puntos] Halle la solución general de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$(3.1) \quad (1-x) dy = (3x+y-2) dx.$$

Solución. Reescribiendo la ecuación (3.1) en la forma estándar tenemos:

$$(3.2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x+y-2}{1-x}.$$

Resolvemos el sistema lineal para encontrar el punto de intersección (h, k) :

$$(3.3) \quad 1-x=0 \implies x=1,$$

$$(3.4) \quad 3x+y-2=0 \implies 3(1)+y-2=0 \implies y=-1.$$

Hacemos el cambio de variable por traslación:

$$(3.5) \quad x=u+1 \implies dx=du,$$

$$(3.6) \quad y=v-1 \implies dy=dv.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.2) obtenemos la ecuación homogénea:

$$(3.7) \quad \frac{dv}{du} = -\frac{3u+v}{u}, \quad [5 \text{ puntos}]$$

Proponemos el cambio para ecuaciones homogéneas

$$(3.8) \quad z = \frac{v}{u} \implies v = zu \implies v' = z'u + z \quad \text{o} \quad \frac{dv}{du} = u \frac{dz}{du} + z.$$

Sustituyendo en (3.9) obtenemos la ecuación de variables separables

$$(3.9) \quad u \frac{dz}{du} + z = -\frac{3u}{u} - \frac{v}{u} = -3 - z \implies u \frac{dz}{du} = -3 - 2z.$$

De donde,

$$(3.10) \quad \int \frac{dz}{3+2z} = - \int \frac{du}{u}, \quad [5 \text{ puntos}]$$

es decir,

$$\frac{1}{2} \log |3+2z| = -\log |u| + C_1$$

$$\log |3+2z| + \log |u^2| = \log |u^2(3+2z)| = C_2$$

$$u^2(3+2z) = C. \quad [5 \text{ puntos}]$$

Sustituyendo ahora $z = v/u$, nos queda:

$$(3.11) \quad u^2 \left(3 + 2\frac{v}{u} \right) = u(3u+2v) = C.$$

Regresando a las variables originales $u = x-1$ y $v = y+1$:

$$(3.12) \quad (x-1)[3(x-1)+2(y+1)](x-1)(3x-3+2y+2) = C.$$

Finalmente,

$$(3.13) \quad (x-1)(3x+2y-1) = C. \quad \blacksquare \quad [5 \text{ puntos}]$$

Nota 3.1. Una solución alternativa al ejercicio 3 se puede desarrollar como se indica a continuación. Notemos que la ecuación (3.2) puede ser escrita así

$$(3.14) \quad y' = \frac{3x + y - 2}{1 - x} = \frac{3x - 2}{1 - x} + \frac{y}{1 - x}.$$

Es decir, tenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$(3.15) \quad y' - \frac{1}{1 - x} y = \frac{3x - 2}{1 - x}.$$

La solución general de (3.15) está dada por:

$$(3.16) \quad y = ce^{-\left(-\int 1/(1-x) dx\right)} + e^{-\left(-\int 1/(1-x) dx\right)} \int \frac{3x - 2}{1 - x} e^{-\int 1/(1-x) dx} dx$$

$$(3.17) \quad = ce^{\int 1/(1-x) dx} + e^{\int 1/(1-x) dx} \int \frac{3x - 2}{1 - x} e^{-\int 1/(1-x) dx} dx$$

$$(3.18) \quad = ce^{-\log(1-x)} + e^{-\log(1-x)} \int \frac{3x - 2}{1 - x} e^{\log(1-x)} dx$$

$$(3.19) \quad = ce^{\log(1-x)^{-1}} + e^{\log(1-x)^{-1}} \int \frac{3x - 2}{1 - x} (1 - x) dx$$

$$(3.20) \quad = c(1 - x)^{-1} + (1 - x)^{-1} \int (3x - 2) dx$$

$$(3.21) \quad = \frac{c}{1 - x} + \frac{1}{1 - x} \left(\frac{3x^2}{2} - 2x \right).$$

Luego,

$$(3.22) \quad 2(x - 1)y = k - 3x^2 + 4x, \quad \text{siendo } k = 2c.$$

Entonces

$$(3.23) \quad k = 2(x - 1)y + 3x^2 - 4x$$

$$(3.24) \quad = 2(x - 1)y + 3x^2 - 3x - x + 1 - 1$$

$$(3.25) \quad = 2(x - 1)y + 3x(x - 1) - x + 1 - 1$$

$$(3.26) \quad = 2(x - 1)(y + 3x - 1) - 1,$$

de donde obtenemos la igualdad (3.13), con $C = (k + 1)/2$.

4. [20 puntos] Resuelva el siguiente problema de valores iniciales:

$$(4.1) \quad y'' + 4y' + 5y = 0, \quad \text{con } y = 2 \text{ e } y' = y'' \text{ cuando } x = 0.$$

Solución. En primer lugar notemos que las condiciones iniciales y la ecuación implican que

$$(4.2) \quad 0 = y''(0) + 4y'(0) + 5y(0) = y'(0) + 4y'(0) + 5 \cdot 2 = 5y'(0) + 10.$$

De donde,

$$(4.3) \quad y'(0) = -2. \quad [5 \text{ puntos}]$$

Por otro lado, el discriminante Δ de la ecuación (4.1) es

$$(4.4) \quad \Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Por tanto la solución general de (4.1) es

$$(4.5) \quad y = e^{-4x/2}(c_1 \sen kx + c_2 \cos kx),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y

$$(4.6) \quad k = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{-(-4)}}{2} = 1.$$

Así, de (4.5) obtenemos

$$(4.7) \quad y(x) = e^{-2x}(c_1 \sen x + c_2 \cos x), \quad [5 \text{ puntos}]$$

Notemos que de la condición $y(0) = 2$ obtenemos

$$(4.8) \quad 2 = y(0) = e^0(c_1 \sen 0 + c_2 \cos 0) = c_2.$$

Por otro lado tenemos que

$$(4.9) \quad y'(x) = -2e^{-2x}(c_1 \sen x + 2 \cos x) + e^{-2x}(c_1 \cos x - 2 \sen x).$$

Usando (4.3) obtenemos

$$(4.10) \quad -2 = y'(0) = -2e^0(c_1 \sen 0 + 2 \cos 0) + e^0(c_1 \cos 0 - 2 \sen 0) = -4 + c_1. \quad [5 \text{ puntos}]$$

Así que $c_2 = 2$. Por tanto, la única solución del problema de valores iniciales (4.1) es

$$(4.11) \quad y(x) = 2e^{-2x}(\sen x + \cos x). \quad [5 \text{ puntos}] \quad \blacksquare$$

5. [20 puntos] Un termómetro que marca 5°C se lleva a una habitación cuya temperatura es de 22°C . Un minuto después, la lectura del termómetro es de 12°C . ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la lectura sea de 22°C ?

Solución. Esta es una aplicación de la «ley de enfriamiento de Newton»:

$$(5.1) \quad \frac{dT}{dt} = k(T_m - T),$$

donde $T = T(t)$ representa la temperatura del termómetro en el instante t (el tiempo medido en minutos), T_m representa la temperatura del medio ambiente (es decir $T_m = 22^{\circ}\text{C}$) y, k es una constante de proporcionalidad. Notemos $T(t)$ crece y por tanto $T'(t) > 0$. Así que (5.1) es una ecuación logística que describe un proceso de crecimiento («calentamiento»). Además, los datos del «experimento» nos indican que

$$(5.2) \quad T(0) = 5,$$

$$(5.3) \quad T(1) = 12.$$

Así que tenemos el problema de valor inicial

$$(5.4) \quad \frac{dT}{dt} = k(22 - T), \quad \text{con } T(0) = 5. \quad [5 \text{ puntos}]$$

Por el método de separación de variables tenemos que la solución general de (5.1) es:

$$(5.5) \quad T(t) = 22 + Ce^{kt}, \quad [5 \text{ puntos}]$$

donde C es una constante de integración.

De (5.2) y (5.5) tenemos:

$$(5.6) \quad 5 = 22 + Ce^{k(0)} = 22 + C \implies C = 5 - 22 = -17.$$

Por tanto, el problema tiene la solución particular:

$$(5.7) \quad T(t) = 22 - 17e^{kt} \quad [3 \text{ puntos}]$$

Por otro lado, de (5.3) y (5.5) tenemos:

$$(5.8) \quad 12 = 22 - 17e^{k(1)} \implies 17e^k = 22 - 12 = 10 \implies e^k = \frac{10}{17}.$$

De donde,

$$(5.9) \quad k = \log\left(\frac{10}{17}\right).$$

Así que la solución del problema de valor inicial (5.4) es:

$$(5.10) \quad T(t) = 22 - 17e^{\log(10/17)t}. \quad [5 \text{ puntos}]$$

La pregunta planteada en el problema es hallar t de tal forma que $T(t) = 22$. Notemos que esto significa lo siguiente:

$$(5.11) \quad 22 = 22 - 17e^{kt} \implies -17e^{kt} = 0 \implies e^{kt} = 0,$$

lo cual es imposible. Por tanto, *no existe instante en el que el termómetro alcanza la temperatura de 22°C .* ■

[2 puntos]

Nota 5.1. $\log(10/17) < 0$, luego

$$(5.12) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(22 - 17e^{\ln(10/17)t}\right) = 22 - 0 = 22.$$