



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

Año: 2026	Período: PAO 1
Materia: ANÁLISIS MATEMÁTICO II	Profesor: Soraya Solís
Evaluación: Primera	Fecha: 03 de julio de 2026

COMPROMISO DE HONOR

Yo, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que no puedo usar calculadoras, celulares u otros dispositivos electrónicos, que sí puedo usar un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que no debo hacer ruidos molestos durante el mismo; y, cualquier objeto que hubiere traído que sea de mi propiedad, debo depositarlo en el lugar autorizado. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

Firma

NÚMERO DE MATRÍCULA:

PARALELO:

1. (10 p.) Sea $q_1, q_2, \dots$ una numeración de los números racionales pertenecientes al intervalo $[0, 1]$ y sea $D_n = \{q_1, \dots, q_n\}$. Defina la sucesión de funciones

$$f_n(x) = 1_{D_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D_n \\ 0 & \text{si } x \notin D_n \end{cases}, \quad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}.$$

- a) Determine la función límite puntual de la sucesión.
- b) Justifique que cada función f_n es Riemann-integrable en $[0, 1]$ y escriba el valor de $\int_0^1 f_n(x)dx$, para cada $n = 1, 2, \dots$.
- c) Determine si la función límite es Riemann-integrable en $[0, 1]$.
- d) Con los resultados obtenidos en b) y c) justifique si la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[0, 1]$.

2. (15 p.) Demuestre el Criterio de Dirichlet.

Sea (f_n) una sucesión de funciones real valuadas definidas en el conjunto T . Suponga que la sucesión de sumas parciales (F_n) es uniformemente acotada en T . Sea (g_n) una sucesión de funciones real valuadas tal que $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ para cada $x \in T$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, y que $g_n \rightarrow 0$ uniformemente en T . Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ converge uniformemente en T .

(Indicación: Utilice la siguiente fórmula de sumas parciales "Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números complejos, $n \in \mathbb{N}$, y sea $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Entonces $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}$ ". Luego, utilice el criterio de Cauchy para mostrar la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$.)

-
3. (10 p.) Demuestre que la función $f(x) = \cos(x)$ es analítica en todo $a \in \mathbb{R}$.
(*Indicación:* pruebe que la función $g(x) = \cos(x + a)$ es analítica en 0 y luego aplique un argumento de traslación.)

-
4. (15 p.) Considere la función 2π -periódica $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$, $x \in [0, 2\pi]$.
- a) Grafique la función f en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.
 - b) Extienda la función a $\mathbb{R}$ y determine su serie de Fourier.
 - c) Pruebe que la serie converge uniformemente a f .
 - d) Usando la serie obtenida en b), deduzca el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.