2 Geometría Analítica en R3

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Encuentre ecuaciones de Rectas y Planos.
- Grafique Rectas y Planos.
- Encuentre distancias.
- Grafique Superficies Cilíndricas, de Revolución y Cuádricas.

2.1 RECTAS EN R^3

2.1.1 DEFINICIÓN

Sea P_0 un punto de R^3 y sea $\vec{S}$ un vector de R^3. Una **Recta** l se define como el conjunto de puntos P de R^3 que contiene a P_0 y tal que los vectores $\vec{V} = \overrightarrow{P_0P}$ son paralelos a $\vec{S}$.

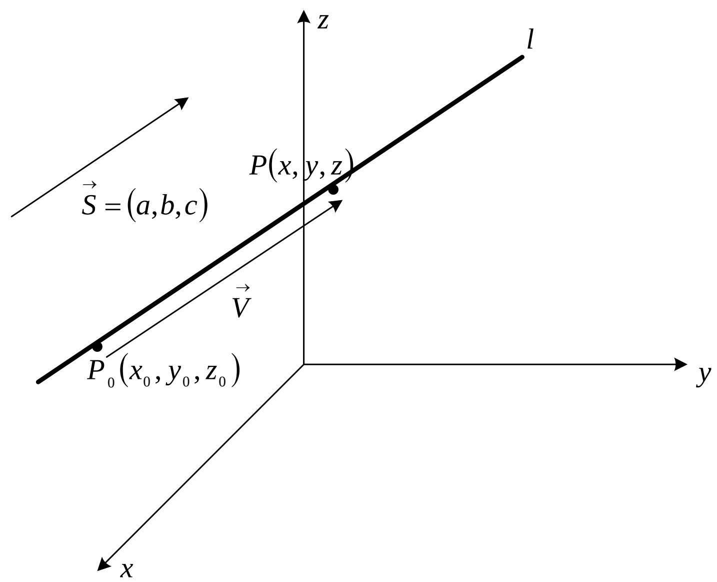
Es decir:

$$l = \left\{ P(x,y,z) / P_0 \in l \ y \ \vec{S} // \vec{V} \ donde \vec{V} = \overrightarrow{P_0P} \right\}$$

Al Vector $\vec{S}$ se lo llama **VECTOR DIRECTRIZ** de la recta.

2.1.2 ECUACIÓN

Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y sea el vector $\vec{S} = (a,b,c)$.



El vector $\vec{S}$ es paralelo al vector $\vec{V} = \vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, entonces:

$$\vec{V} = k\vec{S}$$

Reemplazando resulta:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = k(a,b,c)$$

Por igualdad de vectores, se plantea lo siguiente:

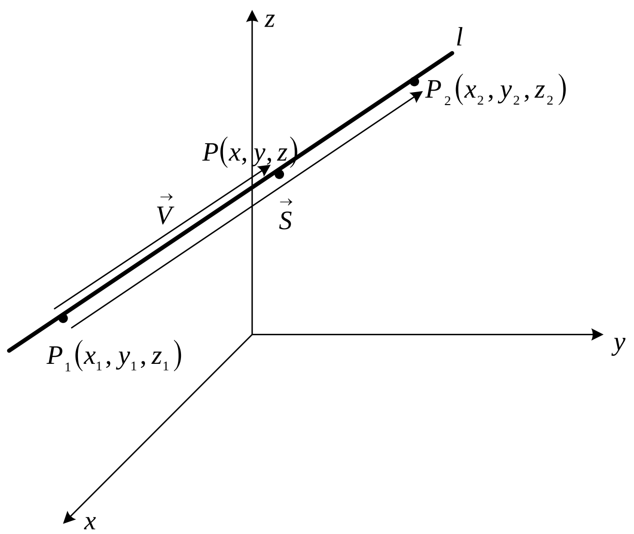
$$\begin{cases} (x - x_0) = ka \\ (y - y_0) = kb \\ (z - z_0) = kc \end{cases}$$

Entonces tenemos:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Ecuación de la recta definida por **un punto** $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **y un vector paralelo** $\vec{S} = (a, b, c)$

En ocasiones anteriores ya se ha mencionado que dos puntos definen una recta, observe la figura:



Ahora tenemos que, $P_0 = P_1(x_1, y_1, z_1)$ y el vector directriz sería:

$$\vec{S} = \overrightarrow{P_1P_2} = \left(\underbrace{x_2 - x_1}_{a}, \underbrace{y_2 - y_1}_{b}, \underbrace{z_2 - z_1}_{c} \right),$$

Entonces, se tiene:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Ecuación de la recta definida por **dos puntos**

También se la llama **ECUACIÓN CANÓNICA O ECUACIÓN SIMÉTRICA**.

Si consideramos:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$$

Tenemos:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Ecuaciones Parámetricas

De lo anterior:

$$(x, y, z) = (x_0 + at,\ y_0 + bt,\ z_0 + ct)$$
$$(x, y, z) = \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\overrightarrow{V}_0} + t\underbrace{(a, b, c)}_{\overrightarrow{S}}$$

Se puede expresar de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_0 + t\,\overrightarrow{S}$$

Ecuación Vectorial

Ejemplo

Hallar las Ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto $P(1,-1-1)$ y es paralela al vector $\overrightarrow{S} = (1,0,2)$.

SOLUCIÓN:
De a cuerdo a lo definido:

$$\begin{cases} x = x_0 + at = 1 + t \\ y = y_0 + bt = -1 \\ z = z_0 + ct = 1 + 2t \end{cases}$$

Ejercicios Propuestos. 2.1

1. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 1, 3) y (1, 2, -1). Grafíquela

   Resp. $l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$

2. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 1, 0) y (2,1, 5). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir? ¿Cuál sería la ecuación del eje z?

3. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 0, 2) y (2,5, 2). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir? ¿Cuál sería la ecuación del eje y?

4. Escriba ecuaciones paramétricas de rectas paralelas al eje x.

5. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 3, 5) y (2,2, 0). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir?

6. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (0, 2, 2) y (2,2, 0). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir?

7. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 0, 2) y (0,2, 2). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir?

8. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene el punto (-1, -6, 2) y es paralela al vector (4, 1, -3). Grafíquela

Resp. $l:\begin{cases} x=-1+4t \\ y=-6+t \\ z=2-3t \end{cases}$

9. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta cuya ecuación es: $\frac{1}{4}(x-10)=\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}z$.

Resp. $l:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=-5t \end{cases}$

2.2 PLANOS

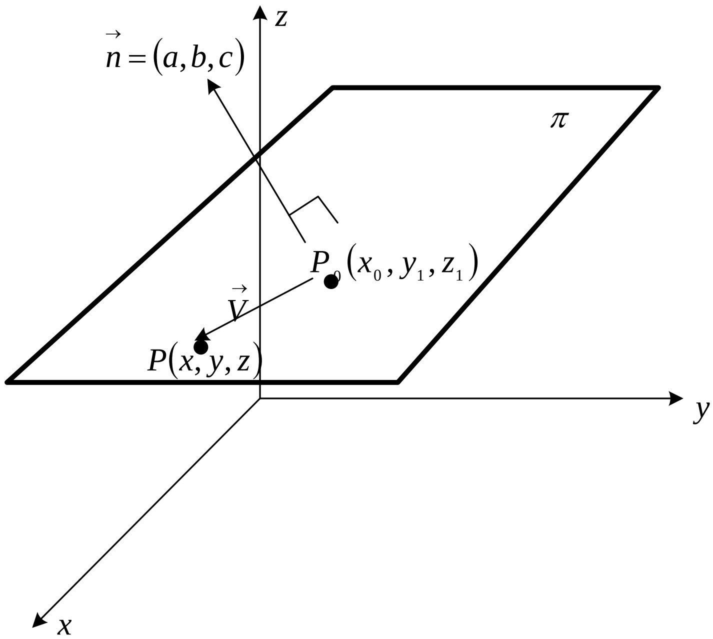
2.2.1 DEFINICIÓN

Sea P_0 un punto de R^3 y sea $\vec{n}$ un vector de R^3. Un Plano π se define como el conjunto de puntos P de R^3 tales que $\vec{n}$ es perpendicular al vector $\vec{V}$ que se define entre P_0 y P. Es decir:

$$\pi=\left\{P(x,y,z)/\vec{n}\bullet\vec{V}=0 \; donde\, \vec{V}=\overset{\rightarrow}{P_0P} \; y \; P_0\in R^3\right\}$$

2.2.2 ECUACIÓN

Sean $\vec{n}=(a,b,c)$ y $P_0(x_0,y_0,z_0)$. Observe la figura:



Entonces

$$\vec{n}\bullet\vec{V}=0$$
$$(a,b,c)\bullet(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

Por tanto, tenemos:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Ecuación de un plano definida por **UN PUNTO Y UN VECTOR PERPENDICULAR.**

Si se simplifica, tenemos:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$ax+by+cz+(-ax_0-by_0-cz_0)=0$$

Considerando $\boxed{d=-ax_0-by_0-cz_0}$, tenemos:

$$ax+by+cz+d=0$$

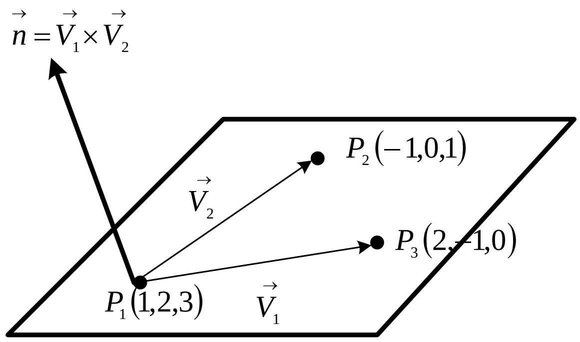
ECUACIÓN GENERAL de un plano.

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_1(1,2,3)$, $P_2(-1,0,1)$ y $P_3(2,-1,0)$

SOLUCIÓN:

Con los tres puntos dados se forman dos vectores (no importa el orden) para de ahí obtener un vector perpendicular al plano buscado.



En este caso:

$$\vec{V_1} = \overrightarrow{P_1P_3} = (2-1,-1-2,0-3) = (1,-3,-3)$$
$$\vec{V_2} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-1-1,0-2,1-3) = (-2,-2,-2)$$

Entonces

$$\vec{n} = \vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (6-6)i - (-2-6)j + (-2-6)k$$

$$\vec{n} = \underbrace{0}_{a}i + \underbrace{8}_{b}j \underbrace{-8}_{c}k$$

Podemos tomar $P_0(x_0, y_0, z_0) = P_1(1,2,3)$ (puede ser cualquier otro punto del plano)

Finalmente, empleando la ecuación:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Resulta:

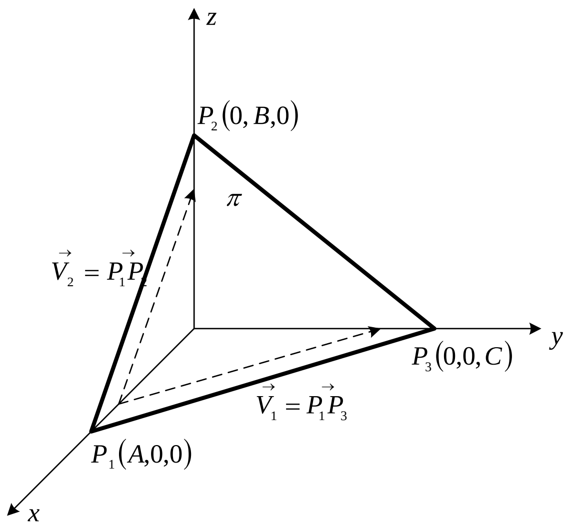
$$0(x-1) + 8(y-2) - 8(z-3) = 0$$
$$8y - 16 - 8z + 24 = 0$$
$$y - z + 1 = 0$$

Ejemplo 2

Demostrar que la ecuación del plano que tiene intersección A, B, C, respectivamente con los ejes x, y, z es $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$.

SOLUCIÓN:

Si el plano tiene intersección A, B, C con los ejes coordenados entonces tenemos tres puntos que pertenecen al plano y se puede determinar su ecuación como en el ejemplo anterior. Observe la figura:



En este caso tomamos: $\vec{V_1} = (-A, B, 0)$ y $\vec{V_2} = (-A, 0, C)$

Entonces:

$$\vec{n} = \vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -A & B & 0 \\ -A & 0 & C \end{vmatrix} = (BC)i - (-AC)j + (AB)k$$

Si tomamos $P_0(x_0, y_0, z_0) = P_1(A,0,0)$ y reemplazando en la ecuación

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Resulta:

$$BC(x - A) + AC(y - 0) + AB(z - 0) = 0$$
$$BCx - ABC + ACy + ABz = 0$$
$$BCx + ACy + ABz = ABC$$

Dividiendo para ABC

$$\frac{BCx}{ABC} + \frac{ACy}{ABC} + \frac{ABz}{ABC} = \frac{ABC}{ABC}$$
$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

2.2.3 CONDICIONES ESPECIALES.

Si el plano es **PARALELO AL PLANO** xy, entonces sólo tendrá intersección con el eje z, su vector normal será de la forma $\vec{n} = (0,0,k)$. Su ecuación será de la forma $z = C$. ¿POR QUÉ?. ¿Cuál es la ecuación del plano xy?

PREGUNTA: ¿Cómo serán las ecuaciones de los planos: paralelo al plano zy, paralelo al plano zx, paralelo al eje z, paralelo al eje x, paralelo al eje y?.

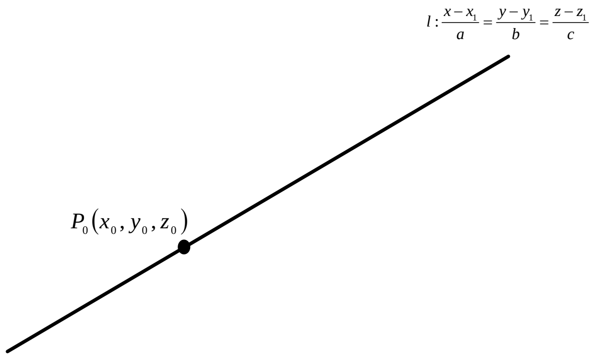
Ejercicios Propuestos.2.2

1. Dibuje los planos cuyas ecuaciones son:
   a) $4x+2y+6z=12$ d) $x+2y=4$ g) $x+y+z=0$
   b) $3x+6y+2z=6$ e) $2x+y-z=6$
   c) $y+z=5$ f) $x-3z=3$
2. Encuentre la ecuación del plano que contienen al punto (-5,7,-2) y que es paralelo al plano "xz"
   Resp. $y=7$
3. Encuentre la ecuación del plano que contienen al punto (-5,7,-2) y que es perpendicular al eje "x"
   Resp. $x=-5$
4. Encuentre la ecuación del plano que contienen al punto (-5,7,-2) y que es paralelo tanto al eje "x" como al de "y"
   Resp. $z=-2$
5. Encuentre la ecuación del plano que contienen al punto (-5,7,-2) y que es paralelo al plano $3x-4y+z=7$
   Resp. $3x-4y+z=-45$
6. Hallar la ecuación del plano paralelo al plano $x+3y-2z+14=0$ y tal que la suma de sus intersecciones con los ejes coordenados sea igual a 5.
   Resp. $x+3y-2z=6$
7. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al plano $3x+8y-5z+16=0$ y que intercepta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C, de tal manera que A + B + C = 31.
   Resp. $3x+8y-5z=120$

2. 3. POSICIONES RELATIVAS

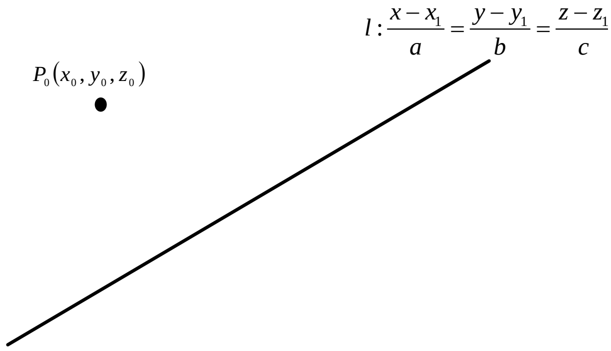
2.3.1 ENTRE UN PUNTO P_0 Y UNA RECTA l

2.3.1.1 EL PUNTO PERTENECE A LA RECTA: $P_0 \in l$



Si un punto pertenece a una recta entonces las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la recta, es decir $\frac{x_0-x_1}{a}=\frac{y_0-y_1}{b}=\frac{z_0-z_1}{c}$

2.3.1.2 EL PUNTO NO PERTENECE A LA RECTA: $P_0 \notin l$

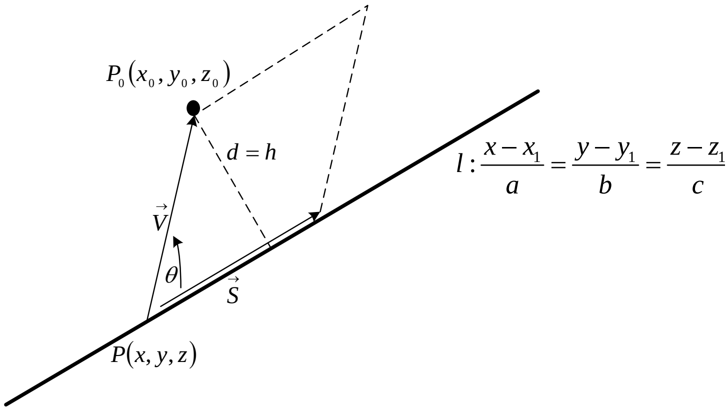


Si un punto no pertenece a una recta entonces las coordenadas del punto no satisfacen la ecuación de la recta, es decir:

$$\frac{x_0-x_1}{a} \neq \frac{y_0-y_1}{b} \quad \text{o} \quad \frac{x_0-x_1}{a} \neq \frac{z_0-z_1}{c} \quad \text{o} \quad \frac{y_0-y_1}{b} \neq \frac{z_0-z_1}{c}$$

2.3.1.2.1 Distancia del punto a la recta

Si escogemos un punto P cualquiera de la recta y definimos un vector $\vec{V}$ entre este punto P y el punto P_0.



La distancia entre el punto P_0 y la recta l, será la altura del paralegramo sustentado por los vectores $\vec{V}$ y $\vec{S}$. Observe la figura anterior.

Entonces:

$$Area = \left\|\vec{V}\times\vec{S}\right\| = \left\|\vec{V}\right\|\left\|\vec{S}\right\| sen\theta$$

Observe que $\boxed{sen\theta = \dfrac{h}{\left\|\vec{V}\right\|}}$ entonces $h = \left\|\vec{V}\right\| sen\theta$

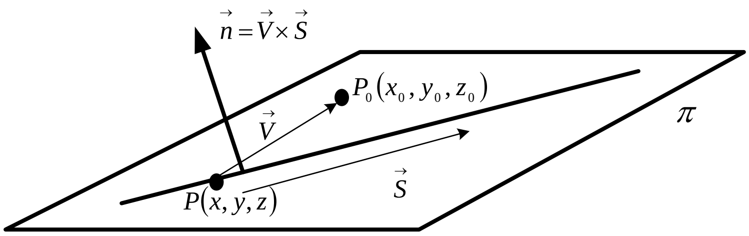
Reemplazando resulta $\left\|\vec{V} \times \vec{S}\right\| = \left\|\vec{S}\right\| h$

Finalmente:

$$h = d(P_0, l) = \frac{\left\|\vec{V} \times \vec{S}\right\|}{\left\|\vec{S}\right\|}$$

2.3.1.2.2 Ecuación del plano que contiene al punto y a la recta.

Un vector normal al plano será el resultante del producto cruz de $\vec{V}$ con $\vec{S}$



Como punto del plano tenemos para escoger entre P_0 y cualquier punto de la recta.

Ejemplo.

Sea $P_0(1,2,3)$ y sea $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$. Hallar la distancia de P_0 a l y la ecuación del plano que contiene a P_0 y a l.

SOLUCIÓN:
Tomamos como punto de la recta a $P(1,-2,1)$, entonces:

$$\vec{V} = \overrightarrow{PP_0} = (1-1,\ 2-(-2),\ 3-1) = (0,4,2)$$

De la ecuación de la recta, tenemos como información $\vec{S} = (2,3,-2)$, entonces:

$$\vec{V} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-14,4,-8)$$

$$\left\| \vec{V} \times \vec{S} \right\| = \sqrt{(-14)^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{276}$$

$$\left\| \vec{S} \right\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$$

Por lo tanto:

$$d\left(P_0, l\right) = \frac{\left\| \vec{V} \times \vec{S} \right\|}{\left\| \vec{S} \right\|} = \frac{\sqrt{276}}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{\frac{69}{17}}$$

Por otro lado, un vector normal al plano sería: $\vec{n} = \vec{V} \times \vec{S} = (-14,4,-8)$

Escogiendo el punto P_0 , tenemos:

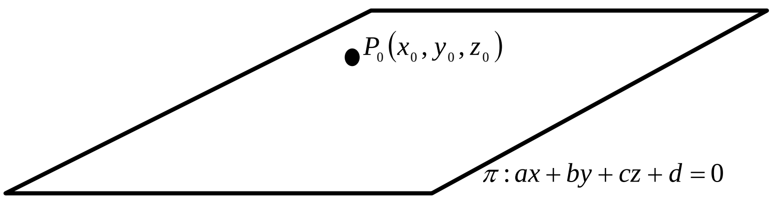
$$a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right) + c\left(z - z_0\right) = 0$$
$$-14\left(x - 1\right) + 4\left(y - 2\right) - 8\left(z - 3\right) = 0$$
$$-14x + 14 + 4y - 8 - 8z + 24 = 0$$

Por tanto, la ecuación del plano sería:

$$\pi : 7x - 2y + 4z - 15 = 0$$

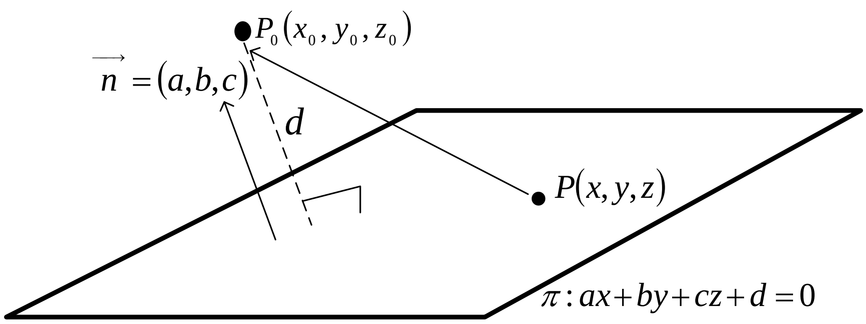
2.3.2 POSICIONES RELATIVAS ENTRE UN PUNTO P_0 Y UN PLANO π

2.3.2.1 EL PUNTO PERTENECE AL PLANO: $P_0 \in \pi$.



En este caso las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación del plano, es decir: $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

2.3.2.2 EL PUNTO NO PERTENECE AL PLANO: $P_0 \notin \pi$.



En este caso las coordenadas del punto NO satisfacen la ecuación del plano, es decir: $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$.

2.3.2.3 Distancia del punto al plano.

Si tomamos un punto P cualquiera del plano y formamos el vector $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{PP_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$. Observe la figura anterior.

La distancia del punto al plano será la proyección escalar de $\overrightarrow{V}$ sobre $\overrightarrow{n}$, es decir:

$$d(P_0,\pi) = \left| \frac{\overrightarrow{V} \bullet \overrightarrow{n}}{\left\| \overrightarrow{n} \right\|} \right| = \left| \frac{(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \bullet (a,b,c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{ax_0 - ax + by_0 - by + cz_0 - cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - ax - by - cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Observe que:

$$d = -ax - by - cz$$

Por lo tanto:

$$d(P_0,\pi) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Ejemplo

Sea $P_0(1,2,3)$ y $\pi: 2x + y - 3z + 1 = 0$. Hallar la distancia entre P_0 y π.

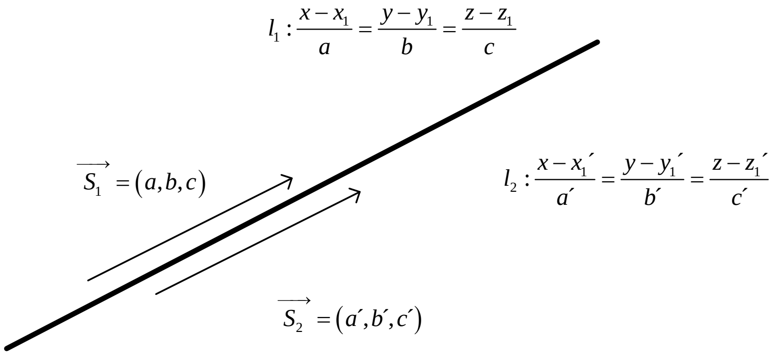
SOLUCIÓN:

Aplicando la formula anterior

$$d(P_0,\pi) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{2(1) + 1(2) - 3(3) + 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

2.3.3 POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS RECTAS l_1 Y l_2.

2.3.3.1 RECTAS COINCIDENTES



Dos rectas son coincidentes si y sólo si:

1. Sus vectores directrices son paralelos: $\overrightarrow{S_1} // \overrightarrow{S_2}$; y,
2. Todos los puntos que pertenecen a una recta también pertenecen a la otra recta; para esto, bastará que un punto de una recta satisfaga la ecuación de la otra recta.

Ejemplo

Sean $l_1 : \frac{x-10}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $l_2 : \frac{x+2}{6} = \frac{y+19}{9} = \frac{z-8}{-3}$.

Observe que:

1. $\vec{S_1} = (2,3,-1)$ y $\vec{S_2} = (6,9,-3)$ son paralelos, debido a que:

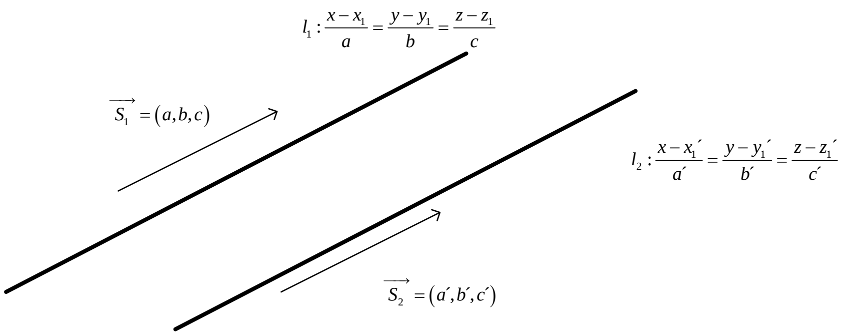
$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{-1}{-3}$$

2. El punto $(10,-1,2)$ de l_1 satisface la ecuación de la recta l_2, debido a que al reemplazar las coordenadas de este punto en la ecuación de l_2, tenemos:

$$\frac{10+2}{6} = \frac{-1+19}{9} = \frac{2-8}{-3}$$

Por tanto l_1 y l_2 son coincidentes.

2.3.3.2 RECTAS PARALELAS: $l_1 // l_2$



Dos rectas son paralelas si y sólo si:

1. Sus vectores directrices son paralelos: $\overrightarrow{S_1} // \overrightarrow{S_2}$; y,
2. Ningún punto de una recta pertenece a la otra recta; para esto, bastará que un punto de una recta **NO** satisfaga la ecuación de la otra recta.

Ejemplo

Sean $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $l_2: \frac{x}{6} = \frac{y-1}{9} = \frac{z+1}{-3}$.

a) Demuestre que son l_1 y l_2 son rectas paralelas.

b) Determine la distancia entre l_1 y l_2.

c) Encuentre la ecuación del plano que contiene a l_1 y l_2.

SOLUCIÓN:

a) Observe que:

1. $\vec{S_1} = (2,3,-1)$ y $\vec{S_2} = (6,9,-3)$ son paralelos, debido a que

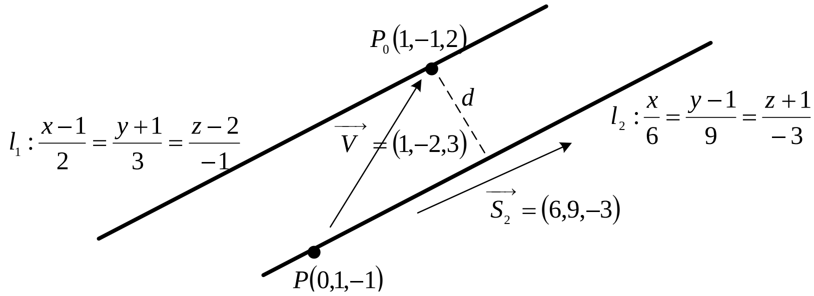
$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{-1}{-3}$$

2. El punto $(1,-1,2)$ de l_1 NO satisface la ecuación de la recta l_2, debido a que al reemplazar las coordenadas de este punto en la ecuación de l_2, tenemos:

$$\frac{1}{6} \neq \frac{-1-1}{9}$$

Por tanto l_1 y l_2 son paralelas.

b) La distancia entre las dos rectas paralelas es igual a la distancia entre un punto de una recta a la otra recta.



$$d(l_1,l_2)=d(P_0,l_2)=\frac{\left\|\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{S_2}\right\|}{\left\|\overrightarrow{S_2}\right\|}$$

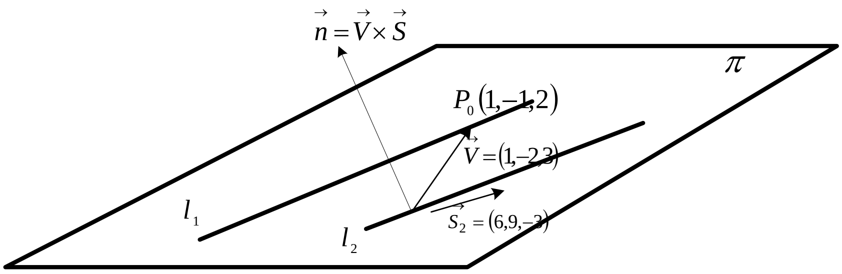
$$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{S_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-7,7,7)$$

$$\left\|\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{S_2}\right\|=\sqrt{(-7)^2+7^2+7^2}=7\sqrt{3}$$

$$\left\|\overrightarrow{S_2}\right\|=\sqrt{6^2+9^2+(-3)^2}=3\sqrt{14}$$

Por tanto: $d(l_1,l_2)=d(P_0,l_2)=\dfrac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{14}}$

d) Las dos rectas paralelas definen un plano que contiene a ambas.



Un vector normal al plano sería:

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{S_2}=(-7,7,7)$$

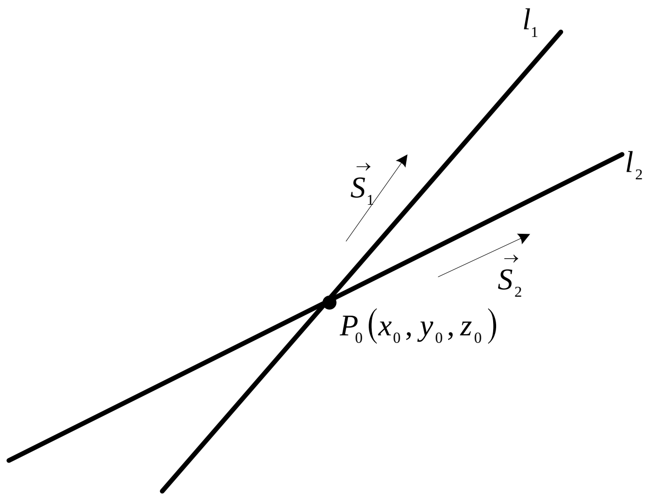
Escogiendo el punto P_0 , tenemos:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$-7(x-1)+7(y+1)+7(z-2)=0$$
$$-x+1+y+1+z-2=0$$

Por tanto, la ecuación del plano sería:

$$\pi:-x+y+z=0$$

2.3.3.2 RECTAS INTERSECANTES.



Dos rectas son intersecantes si y sólo si:

1. Sus vectores directrices NO son paralelos; y,
2. Sólo un punto de una recta pertenece a la otra recta; para esto, deberá existir sólo un punto cuyas coordenadas satisfaga a las ecuaciones de ambas rectas.

Ejemplo

Sean $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y $l_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$.

a) Demuestre que son l_1 y l_2 son rectas intersecantes.
b) Determine la medida del ángulo que forman las rectas.
c) Determine, de existir, la distancia entre l_1 y l_2.
d) Encuentre, de existir, la ecuación del plano que contiene a l_1 y l_2.

SOLUCIÓN:

a) Observe que:

1. $\vec{S_1} = (2,-1,3)$ y $\vec{S_2} = (3,-3,1)$ NO son paralelos, debido a que

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-3}$$

2. Deberá existir un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ que satisfaga las ecuaciones de ambas rectas, es decir:

$$\frac{x_0-1}{2} = \frac{y_0}{-1} = \frac{z_0+1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x_0}{3} = \frac{y_0-2}{-3} = \frac{z_0-1}{1}$$

Encontremos el punto, para lo cual:

$$\begin{cases} x_0 = 1+2t \\ y_0 = -t \\ z_0 = -1+3t \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_0 = 3k \\ y_0 = 2-3k \\ z_0 = 1+k \end{cases}$$

Igualando las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} 1+2t = 3k \\ -t = 2-3k \end{cases}$$

Resolviendo el sistema simultáneo, tenemos:

$\boxed{t=1}$ y $\boxed{k=1}$

Entonces:

$$\begin{cases} x_0 = 1+2(1)=3 \\ y_0 = -(1) = -1 \\ z_0 = -1+3(1)=2 \end{cases}$$

Note que igual resultado se obtiene en la segunda condición:

$$\begin{cases} x_0 = 3(1)=3 \\ y_0 = 2-3(1) = -1 \\ z_0 = 1+(1)=2 \end{cases}$$

Por tanto, las rectas se intersecan en sólo un punto.

b) El ángulo de corte está determinado por el ángulo que forman los vectores directrices; es decir:

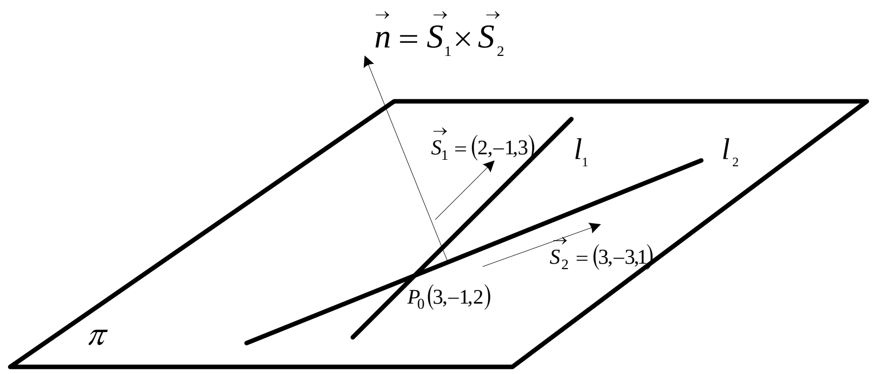
$$\theta = \arccos\frac{\vec{S_1}\bullet\vec{S_2}}{\left\|\vec{S_1}\right\|\left\|\vec{S_2}\right\|} = \arccos\frac{(2,-1,3)\bullet(3,-3,1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{3^2+(-3)^2+1^2}}$$

$$= \arccos\frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{19}}$$

$$\theta = \arccos\frac{12}{\sqrt{266}}$$

c) $d(l_1, l_2)=0$ por ser rectas intersecantes.

d) Un vector normal al plano que definen las rectas intersecantes sería el resultante del producto cruz entre los vectores directrices de las rectas.



Entonces $\vec{n} = \vec{S_1}\times\vec{S_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (8,7,9)$

Reemplazando, tenemos:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$8(x-3)+7(y+1)+9(z-2)=0$$
$$8x-24+7y+7+9z-18=0$$

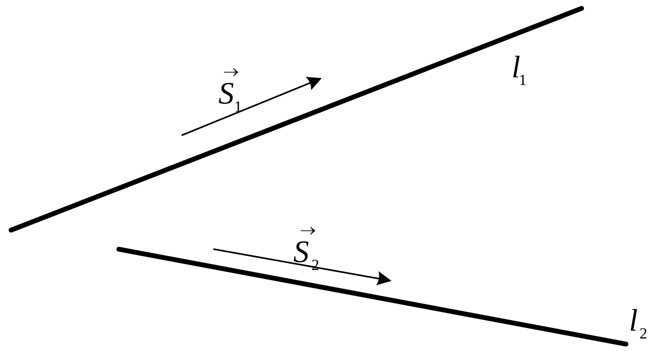
Por tanto, la ecuación del plano sería:

$$\pi: 8x+7y+9z-35=0$$

2.3.3.2 RECTAS OBLICUAS O ALABEADAS.

Dos rectas son Oblicuas o Alabeadas si y sólo si:

1. Sus vectores directrices NO son paralelos; y,
2. Ningún punto de una recta pertenece a la otra recta.



En este caso **no existirá algún plano** que contenga a ambas rectas.

Ejemplo

Sean $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y $l_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Demuestre que son l_1 y l_2 son rectas Oblicuas.

SOLUCIÓN:

Observe que:

1. $\vec{S}_1 = (2,-1,3)$ y $\vec{S}_2 = (3,1,2)$ NO son paralelos, debido a que:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1}$$

2. Ahora nos queda demostrar que NO son intersersecantes. Es decir no debe existir punto de intersección. Por contradicción, supongamos que:

$$\begin{cases} x_0 = 1+2t \\ y_0 = -t \\ z_0 = -1+3t \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_0 = 3k \\ y_0 = 2+k \\ z_0 = -1+2k \end{cases}$$

Tomando las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} 1+2t = 3k \\ -t = 2+k \end{cases}$$

Resulta:

$$\boxed{t = -\tfrac{7}{5}} \quad \text{y} \quad \boxed{k = -\tfrac{3}{5}}$$

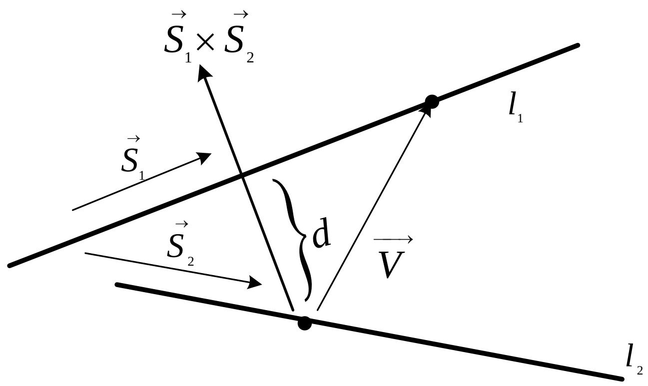
Reemplazando resulta:

$$\begin{cases} x_0 = 1+2\left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{9}{5} \\ y_0 = -\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5} \\ z_0 = -1+3\left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{26}{5} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_0 = 3\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{9}{5} \\ y_0 = 2+\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{5} \\ z_0 = -1+2\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

Por tanto, como los z_0 son distintos en las rectas, se concluye que son OBLICUAS.

2.3.3.2.1 Distancia entre Rectas oblicuas.

Definamos un vector $\vec{V}$, entre un punto cualquiera de una recta con otro punto cualquiera de la otra recta, Observe la figura:



La menor distancia d entre las rectas l_1 y l_2, está dada por la proyección escalar del vector $\vec{V}$ sobre la dirección perpendicular a ambas rectas, que estaría dada por el vector $\vec{S}_1 \times \vec{S}_2$; es decir:

$$d(l_1, l_2) = \left| \frac{\overrightarrow{V} \bullet \left(\overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2} \right)}{\left\| \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2} \right\|} \right|$$

Ejemplo

Hallar la distancia entre las rectas Oblicuas $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y $l_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$.

<u>SOLUCIÓN:</u>

En este caso, un punto de la recta l_1 sería $P_1 = (1,0,-1)$ y un punto de la otra recta l_2 sería $P_2\,(0,2,-1)$, entonces $\vec{V} = \overrightarrow{P_2P_1} = (1,-2,0)$.

Los vectores directrices serían: $\overrightarrow{S_1} = (2,-1,3)$ y $\overrightarrow{S_2} = (3,1,2)$, entonces:

$$\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5,5,5)$$

Por tanto,

$$d\left(l_1,l_2\right)=\left|\frac{\overrightarrow{V}\bullet\left(\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}\right)}{\left\|\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}\right\|}\right|=\left|\frac{(1,-2,0)\bullet(-5,5,5)}{\sqrt{(-5)^2+5^2+5^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{(1,-2,0)\bullet 5(-1,1,1)}{5\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{-1-2+0}{\sqrt{3}}\right|$$

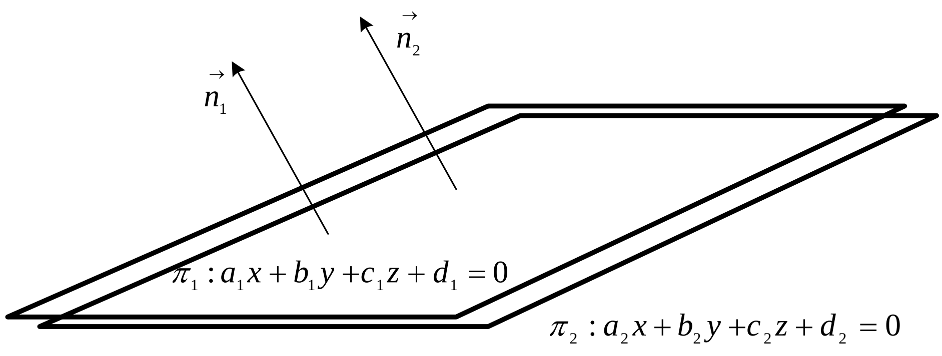
$$d\left(l_1,l_2\right)=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

2.3.4 POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS PLANOS.

2.3.4.1 PLANOS COINCIDENTES.

Dos planos son coincidentes si y sólo si:

1. Sus vectores normales son paralelos; y,
2. Todos los puntos que pertenecen a un plano también pertenecen al otro plano.



En este caso se cumple que:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$$

Ejemplo

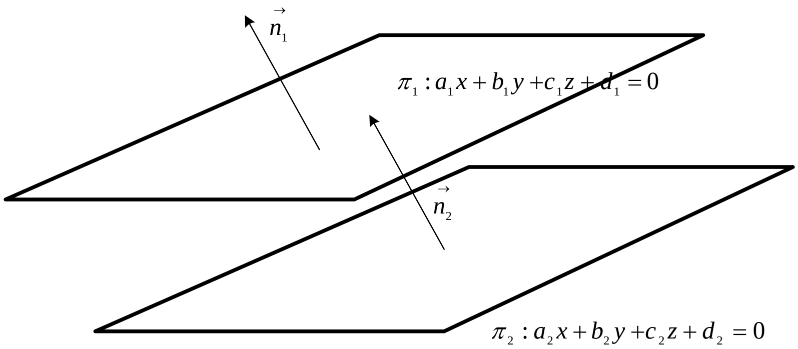
Los planos $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 : 4x - 6y + 2z + 2 = 0$
son coincidentes debido a que:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2.3.4.2 PLANOS PARALELOS: $\pi_1 // \pi_2$

Dos planos son Paralelos si y sólo si:

1. Sus vectores normales son paralelos; y,
2. Todos los puntos que pertenecen a un plano NO pertenecen al otro plano.
3.



En este caso se cumple que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Ejemplo

Sean $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 : 4x - 6y + 2z + 3 = 0$

a) Demuestre que π_1 y π_2 son planos paralelos.
b) Encuentre la distancia entre los planos.

SOLUCIÓN:

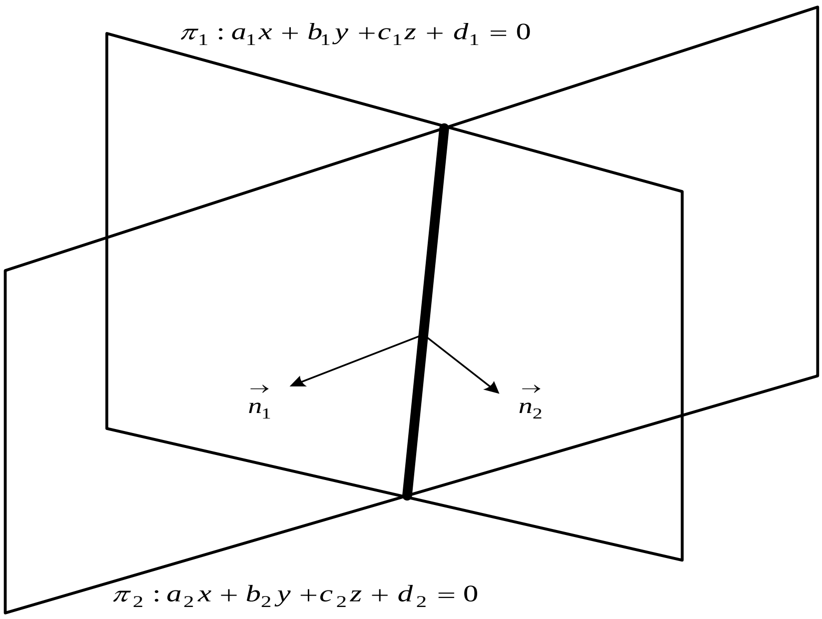
a) En este caso $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$, por tanto los planos son paralelos.

b) La distancia entre dos planos paralelos es igual a la distancia entre un punto de un plano con el otro plano.
En este caso tomemos de π_1 el punto $P_0(0,0,-1)$, entonces:

$$d(P_0, \pi_2) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{4(0) - 6(0) + 2(-1) + 3}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{14}}$$

2.3.4.3 PLANOS INTERSECANTES

Dos planos son intersecantes si y sólo si sus vectores normales NO son paralelos.



En este caso se cumple que:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \vee \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \vee \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Ejemplo

Sean $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 : x + y + z + 2 = 0$

a) Demuestre que π_1 y π_2 son planos intersecantes.
b) Encuentre la distancia entre los planos.
c) Determine la ecuación de la recta de intersección.
d) Halle la medida del ángulo formado por los planos intersecantes.

SOLUCIÓN:

a) En este caso $\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{1}$, por tanto son planos intersecantes.

b) $d(\pi_1, \pi_2) = 0$ por ser planos intersecantes.

c) Primer Método: hallando el conjunto solución del sistema simultáneo:

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + (-2)F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ -5y - z = 3 \end{cases}$$

$$z=-3-5y \qquad \Rightarrow x+y-3-5y=-2 \qquad \Rightarrow x=1+4y$$

Haciendo $\boxed{y=t}$, entonces:

$$l:\begin{cases} x=1+4t \\ y=t \\ z=-3-5t \end{cases}$$

Segundo Método: Un vector directriz de la recta buscada estaría dado por el vector resultante del producto cruz entre los vectores normales de los planos, es decir:

$$\overrightarrow{S}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=(4,1,-5)$$

Para obtener las coordenadas de un punto P_0 que pertenezca ambos planos, bastaría con considerar un valor para una variable en las ecuaciones de los planos y resolver el sistema simultáneo que resultante.

Por ejemplo, considerando $\boxed{x=0}$, tenemos:

$$\begin{cases} 0+y+z=-2 \\ 2(0)-3y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=-2 \\ -3y+z=-1 \end{cases}$$

$$4y=-1 \Rightarrow y=-\tfrac{1}{4}$$

$$-\left(-\tfrac{1}{4}\right)+z=-1 \Rightarrow z=-\tfrac{3}{4}$$

Entonces $P_0\left(0,-\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$,

Finalmente, la ecuación de la recta sería:

$$l:\begin{cases} x=4t \\ y=-\frac{1}{4}+t \\ z=-\frac{3}{4}-5t \end{cases}$$

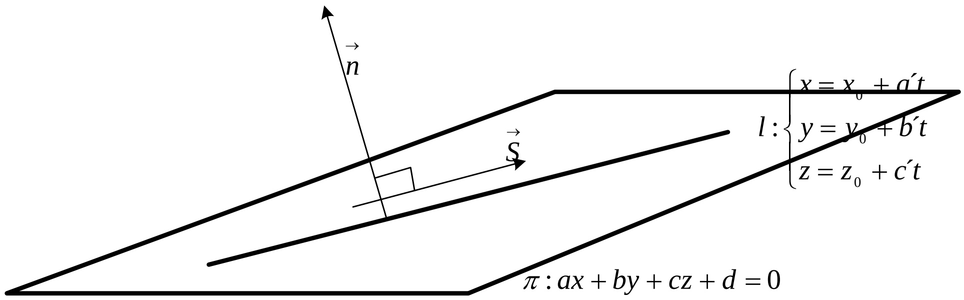
d) La medida del ángulo que forman los planos está dado por el ángulo que forman sus vectores normales, es decir:

$$\theta=\arccos\frac{\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{n_2}}{\left\|\overrightarrow{n_1}\right\|\left\|\overrightarrow{n_2}\right\|}=\arccos\frac{(1,1,1)\bullet(2,-3,1)}{\sqrt{3}\sqrt{14}}=\arccos\frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{14}}=\frac{\pi}{2}$$

2.3.5 POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO.

2.3.5.1 RECTA PERTENECIENTE A UN PLANO.

Una recta pertenece a un plano si y sólo si todos los puntos de la recta pertenecen también al plano.



En este caso se cumple que:

1. Los **vectores directrices** de la recta y los **vectores normales** del plano son **ORTOGONALES.**
2. Un punto cualquiera de la recta satisface la ecuación del plano.

Ejemplo

Sean $\pi : x + y + z + 1 = 0$ y $l:\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$

Demuestre la recta l pertenece al plano π.

SOLUCIÓN:

1. Veamos si es que los vectores $\vec{n} = (1,1,1)$ y $\vec{S} = (-1,2,-1)$ son ortogonales.

   Realizando el producto punto se obtiene:

   $$\vec{n} \bullet \vec{S} = (1,1,1) \bullet (-1,2,-1) = 0$$

   Entonces son Si ortogonales.

2. Veamos si es que el punto de la recta $P_0(1,2,-4)$ satisface la ecuación del plano $x + y + z + 1 = 0$:

   Reemplazando se obtiene:

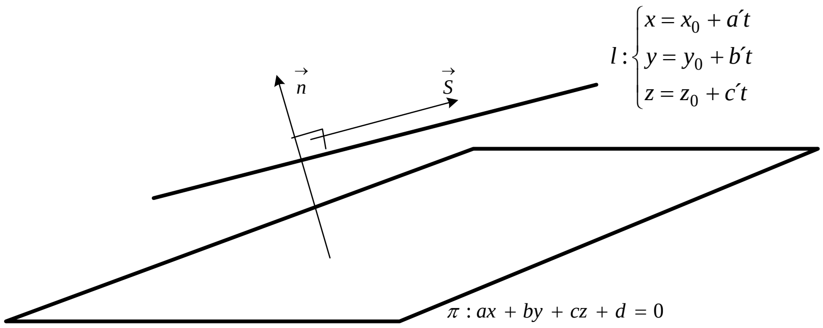
   $$1 + 2 - 4 + 1 = 0$$

   Entonces Si satisface.

Por tanto la recta pertenece al plano.

2.3.5.1 RECTA PARALELA A UN PLANO.

Una recta es paralela a un plano si y sólo si todos los puntos de la recta NO pertenecen al plano.



En este caso se cumple que:

1. Los **vectores directrices** de la recta y los **vectores normales** del plano son **ORTOGONALES**.
2. Un punto cualquiera de la recta No satisface la ecuación del plano.

Ejemplo

Sean $\pi : x + y + z + 1 = 0$ y $l:\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$

a) Demuestre la recta l es paralela al plano π.
b) Halle la distancia entre la recta y el plano

SOLUCIÓN:

a) 1. Veamos si es que los vectores $\vec{n} = (1,1,1)$ y $\vec{S} = (-1,2,-1)$ son ortogonales.
Realizando el producto punto se obtiene:

$$\vec{n} \bullet \vec{S} = (1,1,1) \bullet (-1,2,-1) = 0$$

Entonces son Si ortogonales.

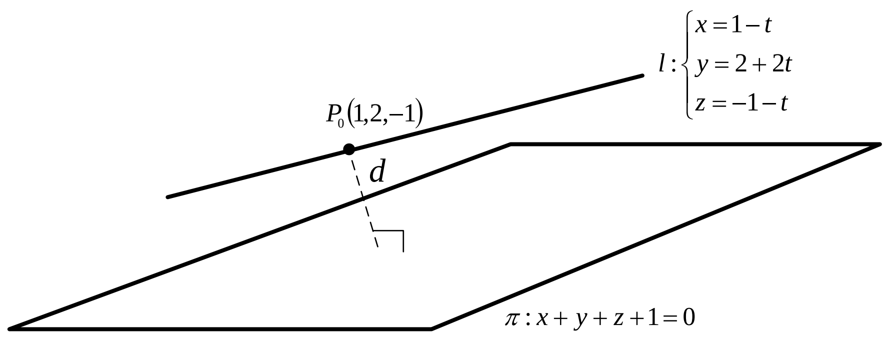
2. Veamos si es que el punto de la recta $P_0(1,2,-1)$ satisface la ecuación del plano $x + y + z + 1 = 0$:
Reemplazando se obtiene:

$$1 + 2 - 1 + 1 \neq 0$$

Entonces NO satisface.

Por tanto la recta es paralela al plano.

c) La DISTANCIA entre una recta paralela a un plano es igual a la distancia entre un punto cualquiera de las recta y el plano

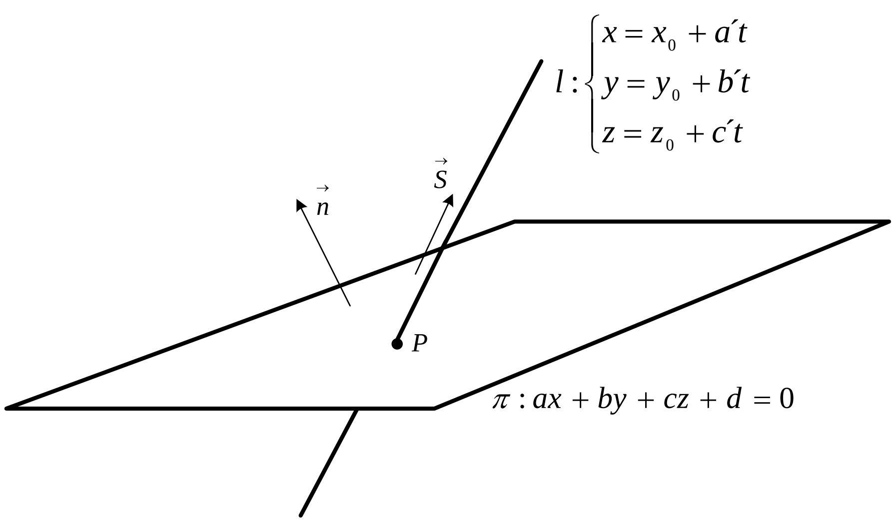


Tomando el punto $P_0(1,2,-1)$, entonces

$$d(P_0,\pi)=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|=\left|\frac{(1)+(2)+(-1)+1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

2.3.5.1 RECTA Y PLANO INTERSECANTE.

Una recta y un plano son intersecantes si y sólo si un punto de la recta pertenece al plano.



En este caso se cumple que los **vectores directrices** de la recta y los **vectores normales** del plano **NO** son **ORTOGONALES**.

Ejemplo

Sean $\pi : x+y+z+1=0$ y $l:\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-4-t \end{cases}$

a) Demuestre que la recta l interseca al π en sólo un punto.
b) Encuentre las coordenadas del punto de intersección
c) Determine la distancia entre la recta y el plano
d) Determine la medida del ángulo que forman la recta y el plano.
e) Halle la ecuación de la recta que es la proyección de la recta l sobre el plano π.

SOLUCIÓN:

a) En este caso $\vec{n}=(1,1,1)$ y $\vec{S}=(-1,1,-1)$, entonces:

$$\vec{n}\bullet\vec{S}=(1,1,1)\bullet(-1,1,-1)=-1\neq 0$$

Por tanto, como no son ortogonales, la recta y el plano son intersecantes.

b) Las coordenadas del punto de intersección se obtienen hallando el conjunto solución del sistema simultáneo que se forma con las ecuaciones de la recta y del plano.
En este caso, tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x=1-t \\ y=2+t \\ z=-4-t \end{cases}$$

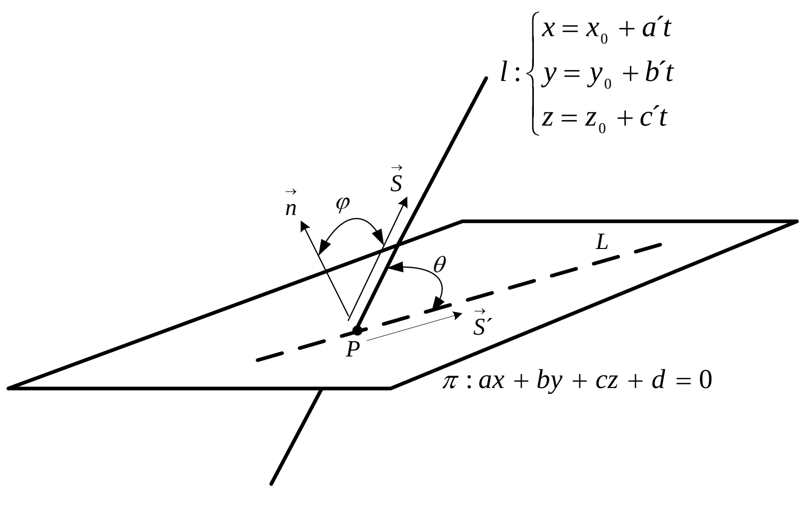
Hallamos primero el valor de t, reemplazando la segunda, tercera y cuarta ecuación en la primera ecuación:

$$1-t+2+t-4-t+1=0 \Rightarrow t=0$$

Entonces $P(1,2,-4)$

c) $d(l,\pi)=0$ Por intersecantes.

d) El ángulo θ que forma la recta y el plano intersecantes está definido por el ángulo que forma un vector directriz de la recta y un vector normal del plano. Observe la figura:



$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{donde } \varphi = \arccos \left| \frac{\vec{n} \bullet \vec{S}}{\left\| \vec{n} \right\| \left\| \vec{S} \right\|} \right|$$

En este caso:

$$\varphi = \arccos \left| \frac{\vec{n} \bullet \vec{S}}{\left\| \vec{n} \right\| \left\| \vec{S} \right\|} \right| = \arccos \left| \frac{(1,1,1)\bullet(-1,1,-1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} \right| = \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

d) Un vector directriz $\vec{S'}$ de la recta proyección L, está dado por:

$$\vec{S'} = \left(\vec{n} \times \vec{S} \right) \times \vec{n} \qquad \text{¿Por qué?}$$

Entonces:

$$\vec{n} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,0,2)$$

$$\vec{S'} = \left(\vec{n} \times \vec{S} \right) \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,4,-2)$$

Y tomando el punto de intersección $P(1,2,-4)$ la ecuación de la recta sería

$$L : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$$

Ejercicios Propuestos 2.3

1. Calcule la distancia entre el punto de coordenadas (10,3,-2) y la recta de ecuación: $x = 4t - 2,\ y = 3,\ z = -t + 1$.

   Resp. $d = 0$

2. Determine si las rectas $l_1 : \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3}$ y $l_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2}$ se interceptan en un punto.

3. Hallar la distancia entre las rectas: $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ y $l_2 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$

   Resp. $d = \frac{3\sqrt{3}}{5}$

4. Hallar la distancia entre las rectas: $l_1 : \frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{3}$ y $l_2 : \frac{x-1}{10} = \frac{y-4}{9} = \frac{z-3}{8}$

   Resp. $d = 0$

5. Determine las coordenadas del punto que está en la base de la perpendicular trazada desde P(-1,-1,4) a la recta $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{3}$

   Resp. $P\left(\frac{27}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7} \right)$

6. Calcule la distancia del plano $2x+2y-z=6$ al punto (2, 2, -4).

   Resp. $d=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

7. Hallar la distancia entre las rectas: $l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ $\quad l_2:\begin{cases}2x-3y+z=0\\x+y-z=21\end{cases}$

   Resp. $d=\frac{140}{\sqrt{33}}$

8. Hallar las ecuaciones de la recta que contiene el punto (3,6,4), intercepta al eje z y es paralela al plano $x-3y+5z-6=0$

   Resp. $l:\begin{cases}x=3t\\y=6t\\z=3t+1\end{cases}$

9. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $l:\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+2t\\z=2+4t\end{cases}$ y es perpendicular al plano $2x+y-3z+4=0$

   Resp. $2x-5y+11z=-4$

10. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $l:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{1}$ y es perpendicular al plano $3x+y-z=0$

    Resp. $10x+17y+z=29$

11. Encuentre el punto que la recta: $x=2-t$, $y=1+3t$, $z=4t$, intercepta al plano $2x-y+z=2$

    Resp. $P(1,4,4)$

12. La recta "l" tiene parametrización: $x=3t+1$, $y=-2t+4$, $z=t-3$. Halle una ecuación del plano que contiene a l y al punto (5,0,2).

    Resp. $6x+11y+4z=38$

13. Hallar la ecuación de la recta que es la proyección de la recta $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-0}{-1}$ sobre el plano $x+3y+z=2$

    Resp. $l:\begin{cases}x=3+5t\\y=4t\\z=-1-17t\end{cases}$

14. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto (1,1,1) y que interseca al plano xy en la misma recta que el plano $3x+2y-z=6$

    Resp. $3x+2y+z=6$

15. Dadas las rectas: $l_1=\begin{cases}x=3+t\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$ $\quad l_2=\begin{cases}x=-t\\y=2+3t\\z=3t\end{cases}$

    a) Demostrar que no se intersecan
    b) Encontrar dos planos paralelos que contengan a cada una de ellas por separado.

    Resp. b) $9x+5y-2z=28$ y $9x+5y-2z=10$

16. Hallar las ecuaciones de la recta que contiene al punto (3,6,4) , intercepta al eje z y es paralela al plano $x-3y+5z=0$

Resp. $l:\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t+1 \end{cases}$

17. Demostrar que las rectas: $l_1\begin{cases} x-2y+2z=4 \\ x+4y+8z+8=0 \end{cases}$ y $l_2\begin{cases} x+y+5z+5=0 \\ x+8y+12z-12=0 \end{cases}$
Son paralelas y hallar la ecuación del plano que las contiene.

18. Hallar la distancia entre los planos: $4y-3z-6=0$ y $8y-6z-27=0$

Resp. $d=\frac{39}{10}$

19. Encontrar la menor distancia entre el punto (3,2,1) y el plano determinado por (1,1,0), (3,-1,1), (-1,0,2).

Resp. $d=2$

20. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto (-4,1,6) y tiene la misma traza en el plano XZ, que el plano $x+4y-5z=8$.

Resp. $\frac{x}{8}+\frac{y}{\frac{2}{13}}-\frac{z}{\frac{8}{5}}=1$

21. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular a los planos $x-y+z=0$ y $2x+y-4z-5=0$, y que pasa por el punto (4,0,-2).

Resp. $x+2y+z=2$

22. Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas: $l_1:\frac{x+3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$
$l_2:\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$

Resp. $2y-3x=9$

23. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $l:\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \\ z=2+4t \end{cases}$ y es perpendicular al plano $2x+y-3z+4=0$.

Resp. $-10x+17y-z=25$

24. Sea la recta $l:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi:2x+4y-3z=2$ hallar el punto de intersección de la recta con el plano, así como la ecuación que determina la proyección de la recta sobre el plano.

Resp. $P\left(\frac{3}{11},\frac{1}{11},-\frac{4}{11}\right)$

25. Encontrar la ecuación del plano que es perpendicular al plano YZ y contiene al punto (2,1,1) además que haga un ángulo de arcos(2/3) rad. Con el plano $2x-y+2z-3=0$.

Resp. $3z-4y=-1$

26. El triángulo que tiene por vértice (1,1,1), (0,0,0), (2,1,0) se lo proyecta sobre el plano Z=-2. Calcular el área de proyección.

Resp. $Area=\frac{1}{2}$

2.4 SUPERFICIES

2.4.1 SUPERFICIES CILINDRICAS.

Sea C una curva de un plano π y sea l una recta no paralela a π. Se define Superficie Cilíndrica al conjunto de puntos que perteneces a rectas paralelas a l y que intersecan a C.

A C se la denomina **Curva Generatriz** (o Directriz) y a l se la denomina **Recta Generatriz**.

Las superficies Cilíndricas que trataremos aquí serán aquellas que tienen la Curva Generatriz perteneciente a los planos coordenados y Rectas Generatrices Paralelas a los ejes coordenados. Es decir, si tienen una de la forma siguiente:

$f(x,y)=0$ Curva Generatriz perteneciente al plano xy, Rectas Generatrices paralelas al eje z.

$f(x,z)=0$ Curva Generatriz perteneciente al plano xz, Rectas Generatrices paralelas al eje y.

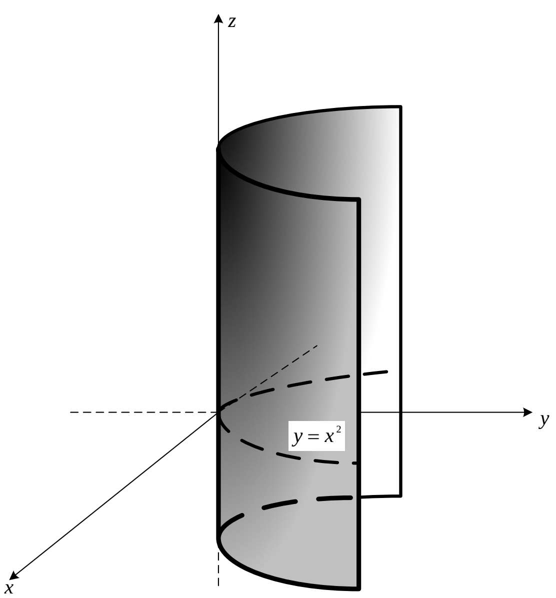
$f(y,z)=0$ Curva Generatriz perteneciente al plano yz, Rectas Generatrices paralelas al eje x.

Ejemplo 1

Graficar $y-x^2=0$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $y=x^2$ en el plano xy y luego se trazan rectas paralelas al eje z siguiendo esta curva.

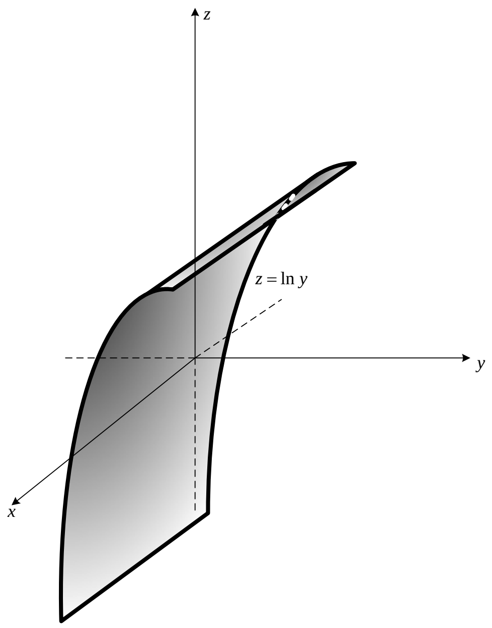


Ejemplo 2

Graficar $z - \ln y = 0$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $z = \ln y$ en el plano zy y luego se trazan rectas paralelas al eje x siguiendo esta curva.

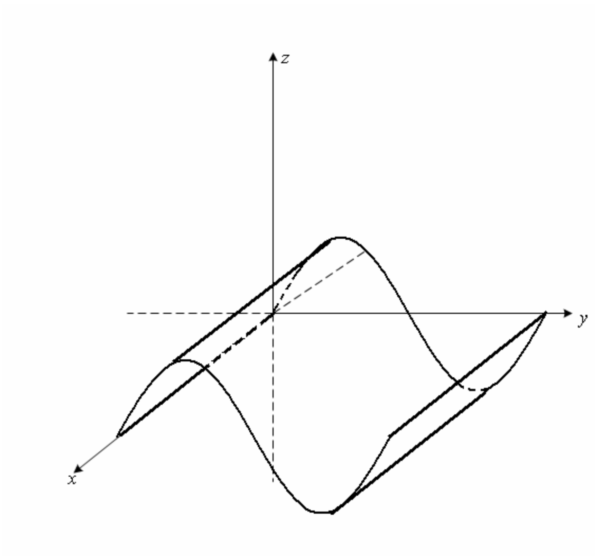


Ejemplo 3

Graficar $z - seny = 0$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $z = seny$ en el plano zy y luego se trazan rectas paralelas al eje x siguiendo esta curva.

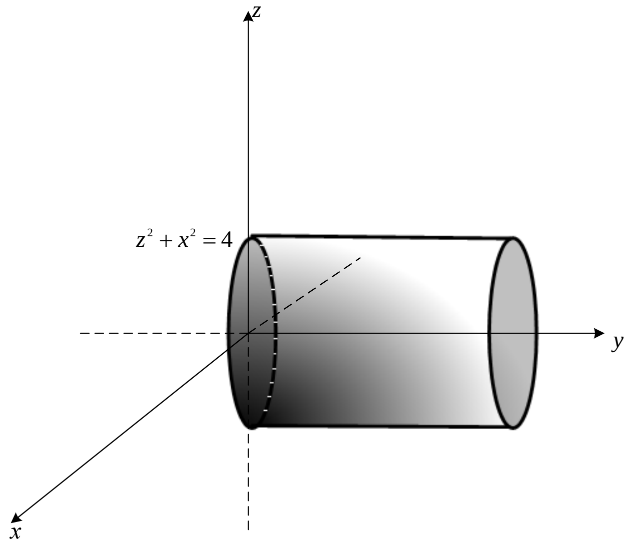


Ejemplo 4

Graficar $z^2 + x^2 = 4$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $z^2 + x^2 = 4$ en el plano zx y luego se trazan rectas paralelas al eje y siguiendo esta curva.



Ejercicios Propuestos 2.4

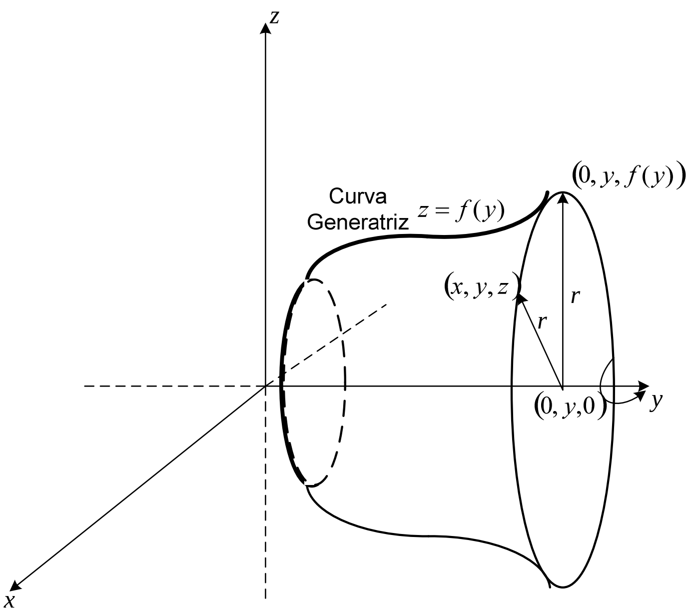
1. Bosqueje la superficie cilíndrica cuya ecuación se indica.

a) $4z^2 - y^2 = 4$	d) $x^2 = y^3$	f) $z - e^y = 0$
b) $z = \operatorname{sen} y$	e) $y = \lvert z \rvert$	g) $y^2 + z^2 = 9$
c) $y^2 + z = 4$		

2.4.2 SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Las Superficies de Revolución que trataremos aquí son aquellas que se generan al girar 360º una curva perteneciente a uno de los planos coordenados alrededor de uno de los ejes coordenados.

Por ejemplo suponga que se tiene la curva $z = f(y)$ (contenida en el plano ZY) y la hacemos girar 360º alrededor del eje y, entonces se forma una superficie de revolución, observe la figura:



La ecuación de la superficie de revolución se la deduce de la siguiente manera

La sección transversal es circular, por tanto:

$$r = \sqrt{(0-0)^2 + (y-y)^2 + (f(y)-0)^2} = f(y)$$

Como también se observa que:

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

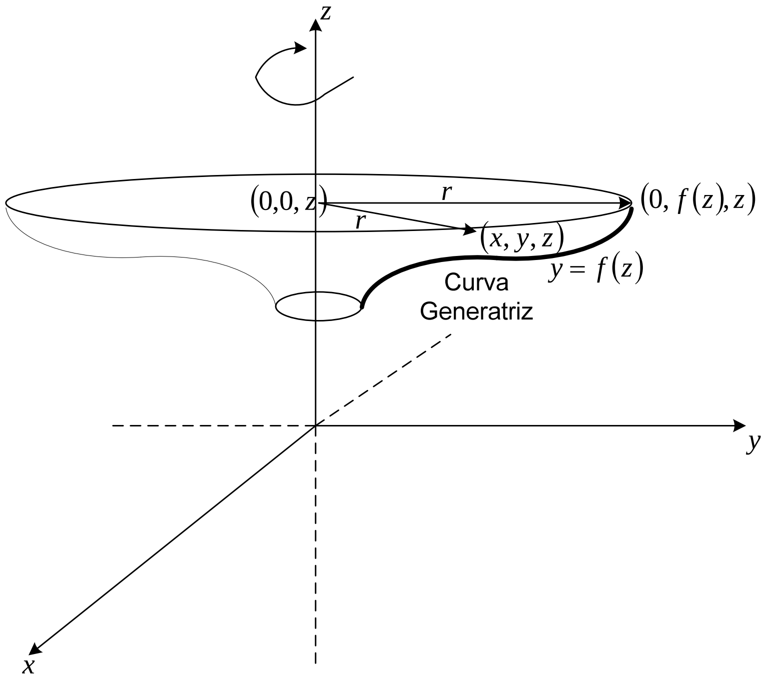
Entonces, igualando resulta:

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2$$

ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN CON CURVA GENERATRIZ $x = f(y)$ (EN EL PLANO xy) O TAMBIÉN $z = f(y)$ (EN EL PLANO zy), GIRADA ALREDEDOR DEL EJE "y".

A, $\boxed{x^2 + z^2}$ se le llama **Binomio de Circularidad**.

En cambio, si la curva generatriz anterior la hacemos girar alrededor del eje z, obtendríamos otra superficie de revolución, observe la figura:



Aquí en cambio:

$$r = \sqrt{(0-0)^2 + \left(f(z)-0\right)^2 + (z-z)^2} = f(z)$$

Y también

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces, igualando resulta:

$$x^2 + y^2 = \left[f(z)\right]^2$$

ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN CON CURVA GENERATRIZ $x = f(z)$ (EN EL PLANO xz) O TAMBIÉN $y = f(z)$ (EN EL PLANO zy), GIRADA ALREDEDOR DEL EJE "z".

El **Binomio de Circularidad** seria $\boxed{x^2 + y^2}$.

La curva anterior no puede ser girada alrededor del eje "x". ¿POR QUÉ?

La ecuación de una superficie de revolución con curva generatriz $y = f(x)$ (en el plano xy) o $z = f(x)$ (en el plano zx) girada alrededor del eje "x", sería:

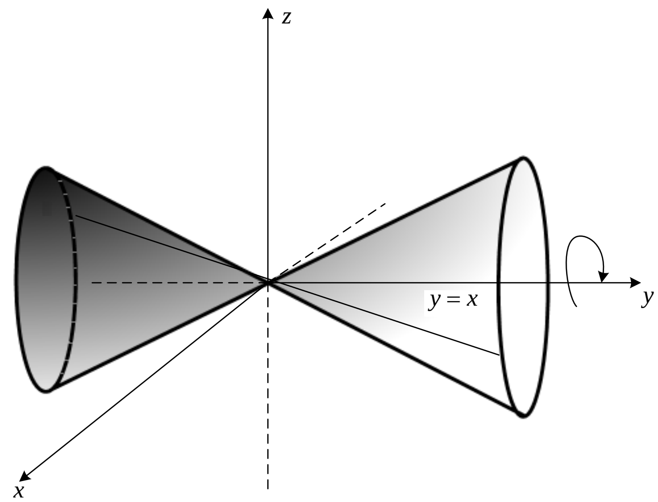
$$y^2 + z^2 = \left[f(x)\right]^2$$ ¡DEDUZCALA!

Ejemplo 1

Encontrar la ecuación de la superficie de revolución que se generar al girar $y = x$ alrededor del eje y.

SOLUCIÓN.

Primero grafiquemos la curva generatriz en el plano xy y formemos la superficie de revolución.



Como el eje de rotación es el eje y, el binomio de circularidad será: $x^2 + z^2$.

Por tanto, la ecuación de esta superficie será de la forma: $x^2 + z^2 = [f(y)]^2$, donde $f(y)$ es la ecuación de la curva generatriz; que en este caso seria: $f(y) = y$

Por tanto, la ecuación de la superficie sería: $x^2 + z^2 = y^2$

Ejemplo 2

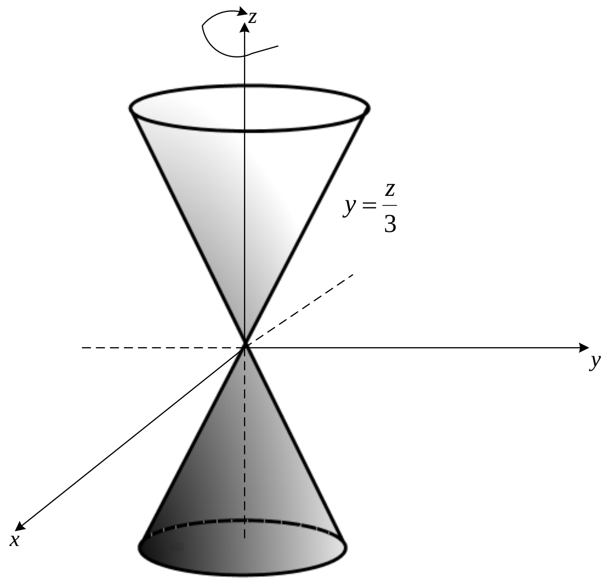
Identificar y graficar la superficie que tiene por ecuación $9x^2 - z^2 + 9y^2 = 0$.

SOLUCIÓN.

Primero identifiquemos el binomio de circularidad y la ecuación de la curva generatriz

$$9x^2 - z^2 + 9y^2 = 0$$
$$9\left(x^2 + y^2\right) = z^2$$
$$x^2 + y^2 = \left[\frac{z}{3}\right]^2$$

Por tanto de acuerdo a la forma de la última ecuación se concluye que se trata de una superficie de revolución con curva generatriz $\boxed{x = \frac{z}{3}}$ o también $\boxed{y = \frac{z}{3}}$, girada alrededor del eje z (la variable que no aparece en el binomio de circularidad).



Ejercicios Propuestos 2.5

1. Halle una ecuación de la superficie de revolución que se genera al girar la curva plana dada, alrededor del eje dado. Grafique.
   a) $x^2+4z^2=16,$ alrededor del eje x .
   b) $y=\operatorname{sen} x,$ alrededor del eje x.
   c) $x^2=4y,$ alrededor del eje y .
   d) $xy=1,$ alrededor del eje x .
   e) $z^2=6x,$ alrededor del eje x .
   f) $z=e^x$, alrededor del eje x .

2. Encuentre el eje y la curva generatriz de cada una de dichas superficies de revolución. Realice el gráfico correspondiente.
   a) $x^2+z^2-2y=0$
   b) $x^2+z^2=|y|$
   c) $y^2+z^2=e^{2x}$
   d) $x^2+4y^2+4z^2=36$

2.4.3 SUPERFICIES CUADRICAS.

Las Superficies Cuádricas o simplemente Cuádricas con eje central paralelo a los ejes coordenados, tienen por ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

Si la llevamos a la forma canónica, completando cuadrado, tendremos los siguientes lugares geométricos.

2.4.3.1 ESFERA.

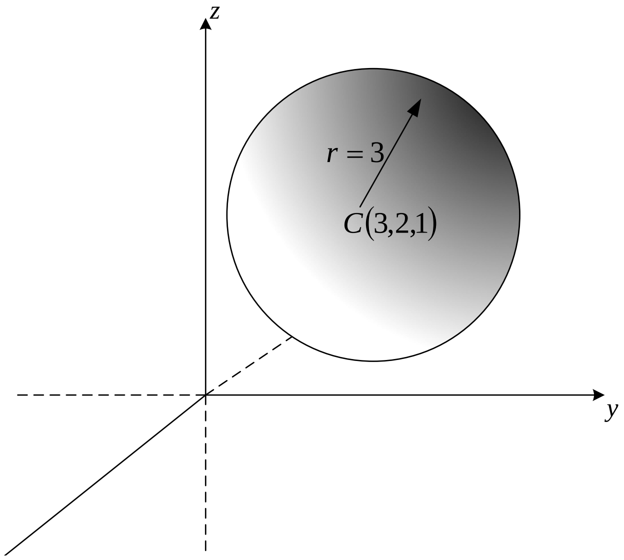
La ecuación canónica de la esfera es de la forma:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2 \text{ con } r^2 > 0$$

Donde, su centro es $C(h,k,l)$ y su radio es r

Ejemplo

La ecuación $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$, tiene como lugar geométrico una esfera de centro $C(3,2,1)$ y radio $r = 3$



Analice el lugar geométrico, si $r^2 < 0$ y si $r^2 = 0$

2.4.3.2 ELIPSOIDE

La ecuación canónica de un elipsoide es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Donde, su centro es $C(h,k,l)$

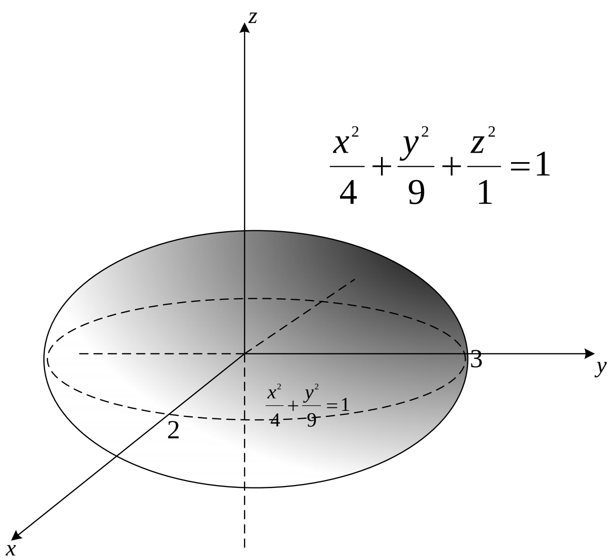
Ejemplo

La ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$ representa un elipsoide con centro el origen.

Su traza (intersección) con el plano xy, se obtiene haciendo $z=0$,

Entonces, resulta $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, la ecuación de una elipse.

Además todas las secciones transversales son elipses. ¿Por qué?



2.4.3.3 HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

Un hiperboloide de una hoja con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Si $z=0$ (Traza xy) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (Elipses)

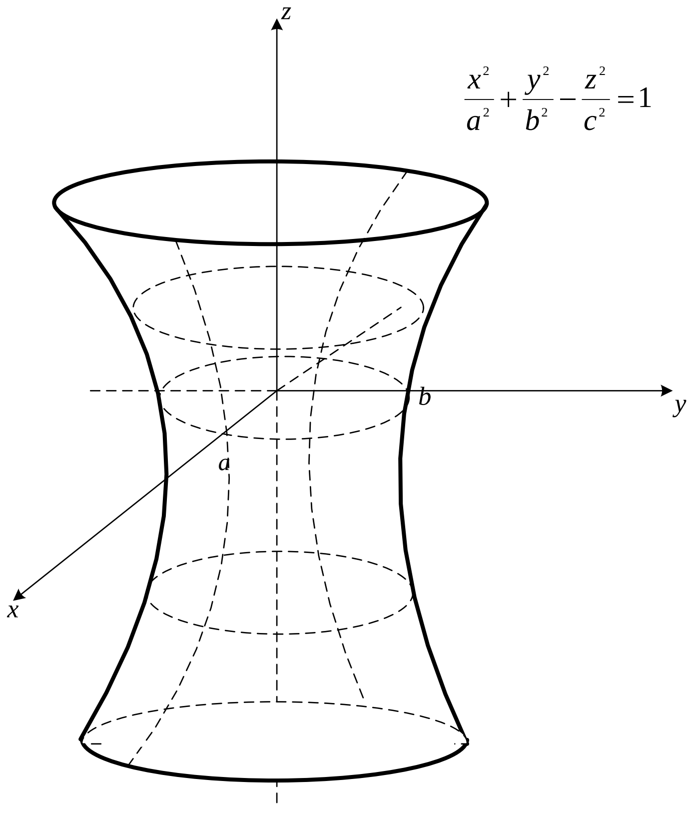
Y todas sus secciones transversales paralelas al plano xy serán elipses. ¿Por qué?

Si $y=0$ (Traza zx) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (hipérbolas)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán hipérbolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (hipérbolas)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán hipérbolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

2.4.3.4 HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

Un hiperboloide de dos hojas con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=-1$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (No tenemos lugar Geométrico)

Si $z=c$, tenemos $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (punto)

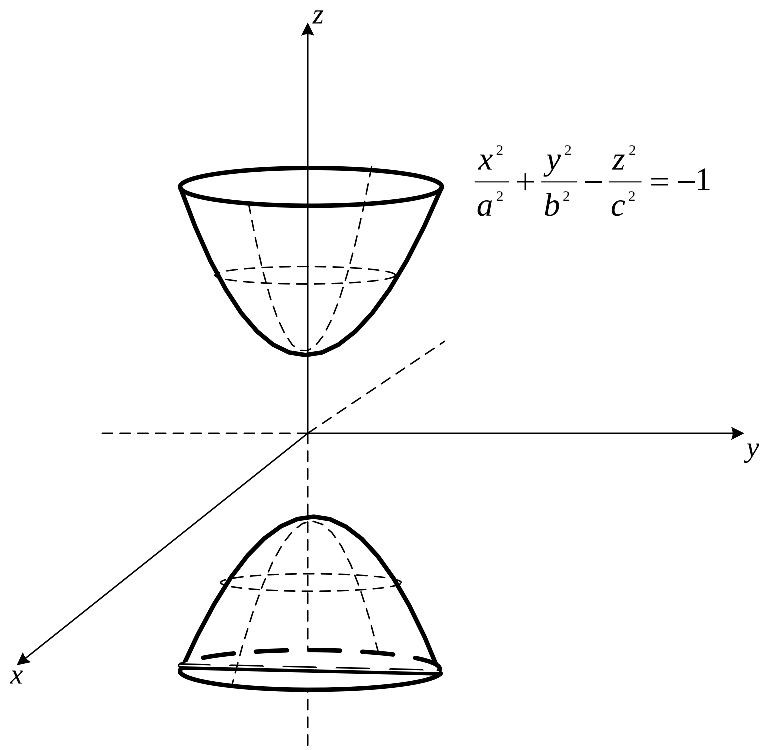
Si $z>c$ 0 $z<-c$ tenemos **elipses**. ¿Por qué?

Si $y=0$ (Traza zx) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (**hipérbolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán hipérbolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (hipérbolas)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán hipérbolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1$$

2.4.3.5 DOBLE CONO

Un Doble Cono con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=0$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (un punto)

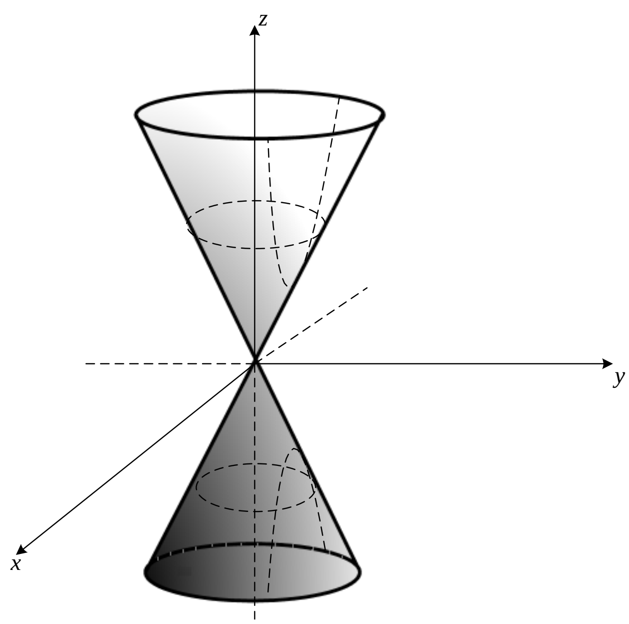
Si $z\neq 0$ tenemos **elipses**.

Si $y=0$ (Traza zx) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (dos rectas)

Si $y\neq 0$ tenemos **hipérbolas**

Si $x=0$ (Traza zy) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (dos rectas)

Si $x\neq 0$ tenemos **hipérbolas**



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$$

2.4.3.6 PARABOLOIDE ELIPTICO

Un Paraboloide Elíptico con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}\pm(z-l)=0$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, grafiquemos: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (un punto)

Si $z>0$, tenemos **elipses**. (Con $a=b$ tenemos circunferencias, en cuyo caso se lo denomina **Paraboloide Circular**).

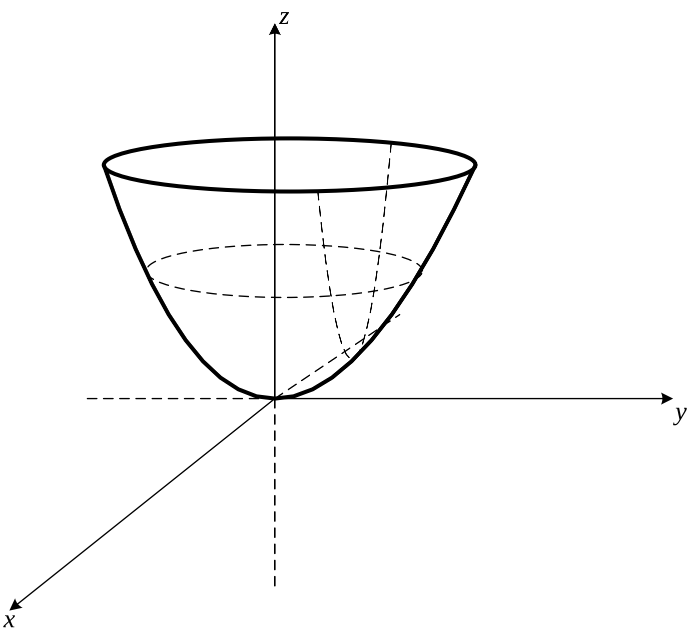
Si $z<0$, no tenemos lugar geométrico.

Si $y=0$ (Traza zx) tenemos $z=\frac{x^2}{a^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán parábolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) tenemos $z=\frac{y^2}{b^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán parábolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de:

$$-z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$z-l=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$x=\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$$

2.4.3.7 PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Un Paraboloide Hiperbólico con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}\pm(z-l)=0$$

Grafiquemos $z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$.

Si $z=0$ (Traza xy) tenemos $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$ (2 rectas)

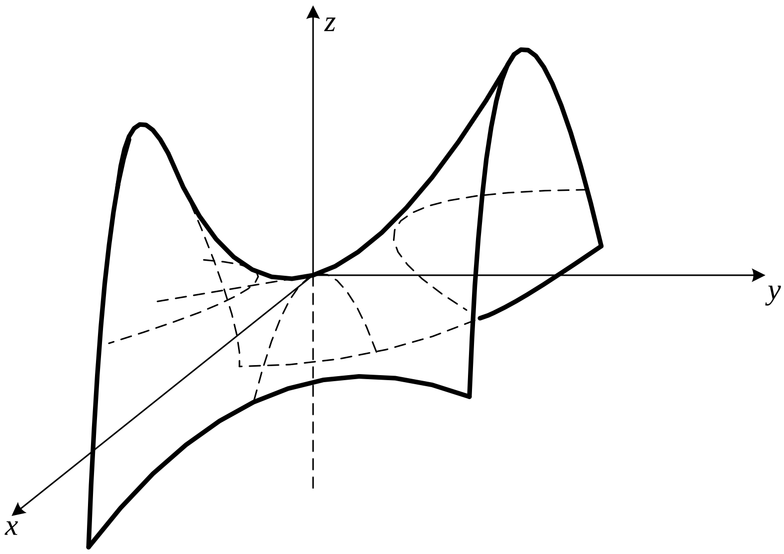
Si $z>0$ o $z<0$ tenemos **hipérbolas**.

Si $y=0$ (Traza zx) tenemos $z=-\frac{x^2}{a^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán parábolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) tenemos $z=\frac{y^2}{b^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán parábolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$z - l = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$x = \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$$

Ejemplo

Grafica el lugar geométrico cuya ecuación es: $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$

SOLUCIÓN:

Transformemos la ecuación dada a una de las formas descritas anteriormente:

Despejando las variables:

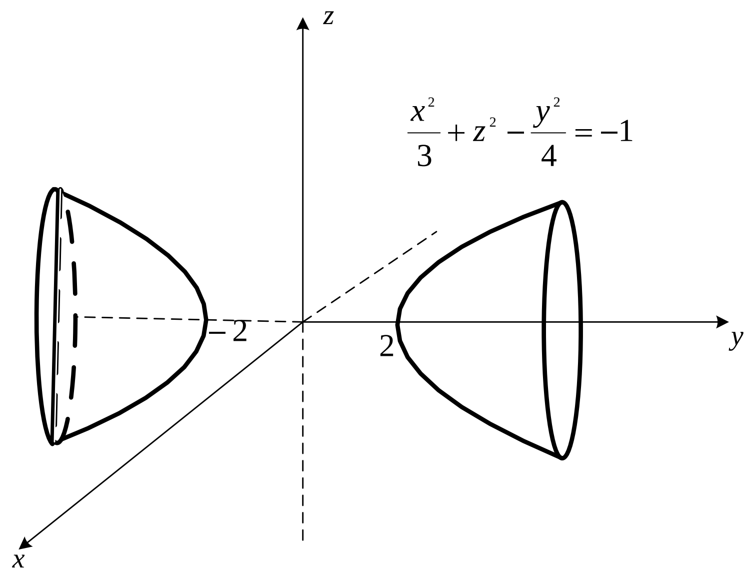
$$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 = -12$$

Dividendo para 12 y simplificando:

$$\frac{4x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} + \frac{12z^2}{12} = -\frac{12}{12}$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = -1$$

De acuerdo a la forma de la última ecuación, se concluye que representa un PARABOLOIDE DE DOS HOJAS, con el eje y como eje de simetría (el término negativo lo indica)



Ejercicios Propuestos 2.6

Diga el nombre de las superficies cuádricas cuyas ecuaciones se dan a continuación. Haga la gráfica en cada caso.

a) $4x^2+36y^2+9z^2-1=0$

b) $4x^2-y^2+4z^2-4=0$

c) $144x^2+16y^2-9z^2-144=0$

d) $36x^2+4y^2+9z=0$

e) $9x^2+36y^2-4z^2+36=0$

f) $x^2-4y^2+4z^2-4=0$

g) $100x^2+225y^2-36z^2=0$

h) $16x^2-25y^2+400z=0$

i) $x^2-z^2+y=0$

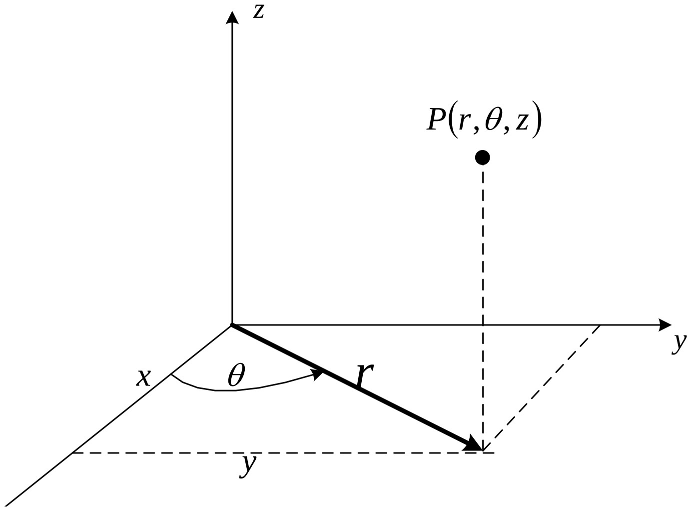
j) $400x^2+25y^2+16z^2-400=0$

k) $x^2+4z^2-8y=0$

l) $225x^2-100y^2+144z^2=0$

2.5 COORDENADAS CILÍNDRICA.

Un punto P en Coordenadas Cilíndricas está denotado como (r, θ, z) donde r y θ son las Coordenadas Polares.

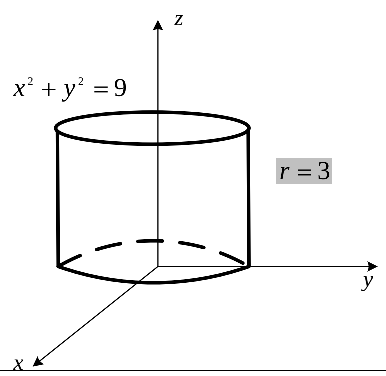


Entonces las transformaciones serían:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

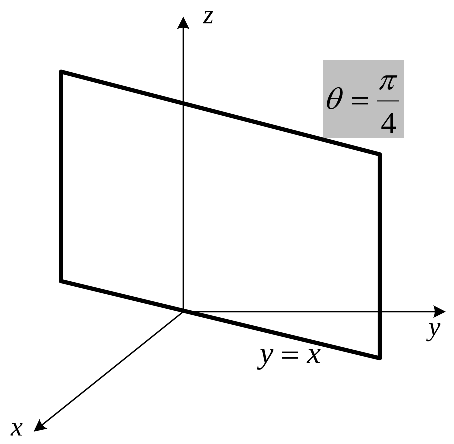
Ejemplo 1.

El cilindro que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $x^2 + y^2 = 9$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $r = 3$



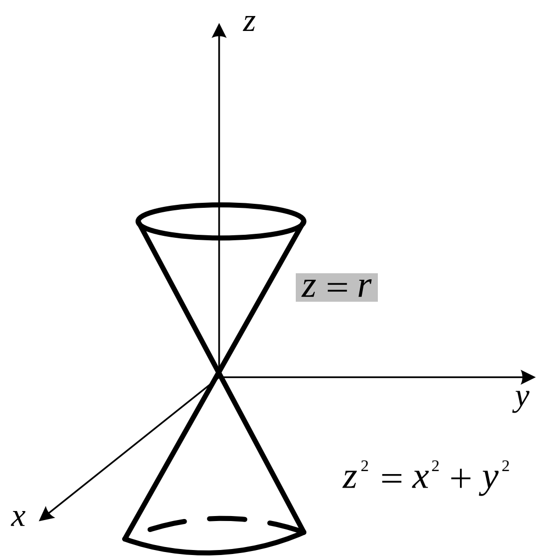
Ejemplo 2

El plano que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $y = x$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $\theta = \frac{\pi}{4}$



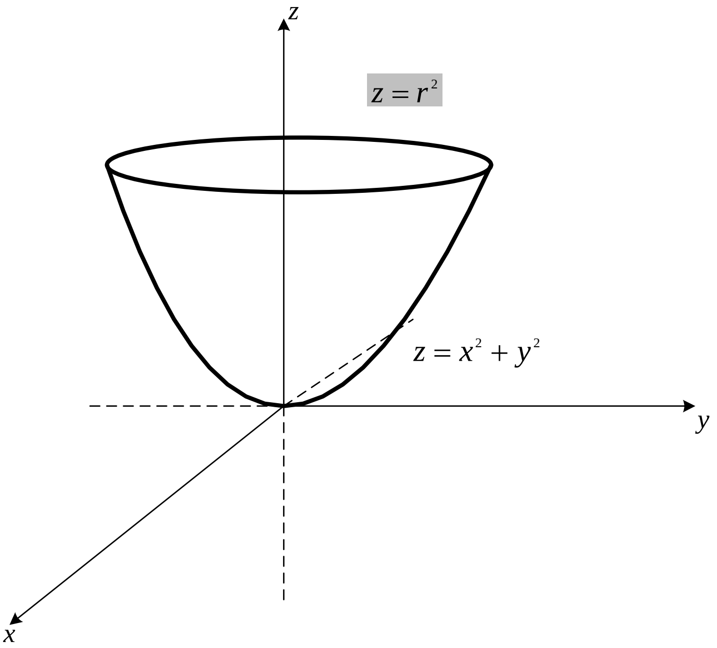
Ejemplo 3

El Doble Cono Circular que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $z^2 = x^2 + y^2$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $z = r$



Ejemplo 4

El Paraboloide Circular que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $z = x^2 + y^2$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $z = r^2$



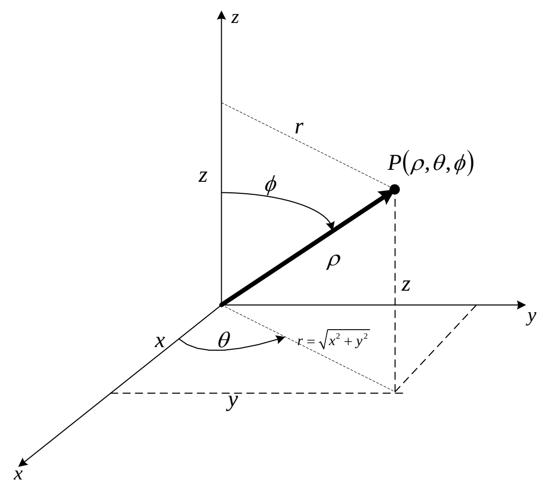
2.6 COORDENADAS ESFÉRICAS.

Un punto de R^3, puede ser denotado también como un vector que inicia en el origen con:

- Magnitud ρ,
- Angulo θ, que forma su proyección r en el plano xy con respecto a la dirección positiva del eje x,

y

- Angulo ϕ con respecto a la dirección positiva del eje z



$$0 \le \rho < \infty$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \phi \le \pi$$

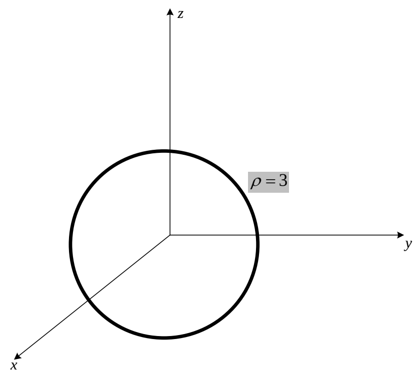
Observe que:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arctg\,\dfrac{y}{x} \\ \phi = arc\cos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\ sen\phi\cos\theta \\ y = \rho\ sen\phi\cos\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

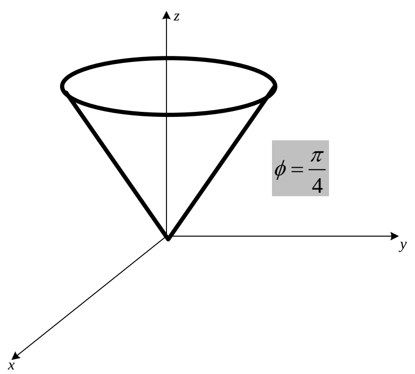
Ejemplo 1

La Esfera que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, su ecuación en coordenadas esféricas será $\rho = 3$



Ejemplo 2

El Cono que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, su ecuación en coordenadas esféricas será $\phi = \dfrac{\pi}{4}$



Ejemplo 3

Identificar y graficar la superficie que tiene por ecuación $\rho = 3\cos\phi$.

SOLUCIÓN:

Utilizando las ecuaciones de trasformación:

$$\rho = 3\cos\phi$$

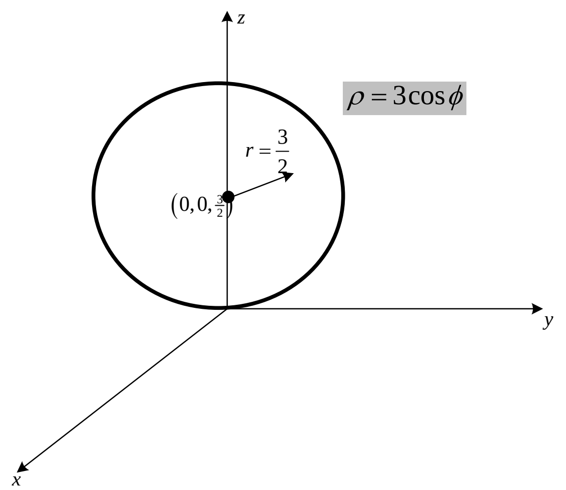
$$\rho = 3\frac{z}{\rho}$$

$$\rho^2 = 3z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3z$$

$$x^2 + y^2 + \left(z - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4}$$

De la última ecuación se concluye que es una esfera de centro $\left(0, 0, \tfrac{3}{2}\right)$ y radio $\tfrac{3}{2}$



Ejercicios propuestos 2.7

Halle una ecuación en coordenadas rectangulares y dibuje las siguientes superficies.

a) $r = 2$

b) $r^2 = z$

c) $\theta = \pi/4$

d) $\phi = \pi/4$

e) $\rho = 5$

f) $\rho = 4\sec\phi$

g) $r^2 = 5 - x$

h) $r = 2\,sen\theta$

i) $z = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$

j) $\rho = 4\cos\phi$

k) $r = z/2$

l) $r = 2\cos\theta$

m) $\rho^2 + x = 2$

n) $r^2 + z^2 = 4$

o) $\rho = 4\csc\phi\sec\theta$

p) $r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + z^2 = 1$

q) $\rho = \csc\phi$

Misceláneos

1. Identifique Y GRAFIQUE las siguientes superficies.
   a) $z^2 = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 4z$
   b) $9z^2 - 2x^2 - 3y - 3x + 5 = 0$
   c) $5x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 2z + 3y = 0$
   d) $-3x^2 + 2y^2 - 3x + 2y + z^2 = 0$
   e) $x^2 + 5y^2 - 2x + 10y = z^2$
   f) $2x^2 + 3y^2 - y - 2 = 0$
   g) $-3x^2 + 2y^2 + 2y - 3x + z = 0$
   h) $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x - 8y + 2z + 17 = 0$
   i) $9y^2 - 4z^2 + 18x^2 = 0$
   j) $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 146$
   k) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$
   l) $z^2y^2 + z^2x^2 = 4$
   m) $x^2 = y^2 - z^2$
   n) $5x^2 - 3y^2 + z^2 = 4$
   o) $y^2 = \ln z$
   p) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
   q) $z^2 = \operatorname{sen} y + 5$
   r) $2x = \ln\left(z^2 + y^2\right)$
   s) $x^2 + y - 2z = 0$
2. Encuentre la ecuación general de la esfera que es tangente al plano $x - 8y + 4z + 4 = 0$ y que tiene el mismo centro que
   $$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y - 6z + 33 = 0.$$
   Resp. $(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$
3. Hallar la menor distancia que hay entre el plano $x + 2y + 2z = 20$, y la esfera que tiene por ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$
   Resp. $d = 2$
4. Dibújese la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.
   a) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 2$
   b) $z = \sqrt{4 - x^2}, y = \sqrt{4 - x^2}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$
   c) $x^2 + y^2 = 1, \quad x + z = 2, \quad z = 0$
   d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
   e) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad y = 2z, \quad z = 0$
   f) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 4 - x^2 - y^2$
5. Encuentre las coordenadas de los focos de la elipse que resulta de la intersección de $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ con $z = 4$.
   Resp. $\left(0, 2\sqrt{5}, 4\right)$ y $\left(0, -2\sqrt{5}, 4\right)$
6. Encuentre las coordenadas del foco de la parábola que resulta de la intersección de $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ con $x = 4$.
   Resp. $\left(4, 0, \frac{25}{4}\right)$
7. Pruebe que la proyección en el plano xz de la curva que es la intersección de las superficies $y = 4 - x^2$, y $y = x^2 + z^2$ es una elipse y encuentre sus diámetros mayor y menor.
8. Dibuje el triángulo en el plano $y = x$ que está arriba del plano $z = \frac{y}{2}$, debajo del plano $z = 2y$, y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 8$. Después encuentre el área de este triángulo.
   Resp. $A = 3\sqrt{2}$

9. Encontrar los valores de k para los cuales la intersección del plano $x+ky=1$ y el hiperboloide elíptico de dos hojas $y^2-x^2-z^2=1$ es:
   a) Una elipse
   b) Una hipérbola

   Resp. a) $k\in\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$ b) $k\in\left(-1,1\right)$

10. Demostrar que la intersección del paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$ y el plano $z=bx+ay$ consiste de dos líneas rectas que se interceptan.

11. Sean P,Q los puntos de intersección del paraboloide hiperbólico $y^2-x^2=z$ con la recta $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$, hallar la proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el vector $V=-\hat{\imath}+\hat{j}+\hat{k}$

    Resp. $\operatorname{Proy}_{\overrightarrow{V}}\overrightarrow{PQ}=\left(-4,4,4\right)$