6 CURVAS

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Describas curvas de R^3.
- Calcule velocidad, rapidez, aceleración, ecuación de recta tangente, ecuación de plano tangente (Rectificante), ecuación de plano Normal, ecuación del plano Osculador, Curvatura, aceleración normal, aceleración tangencial.

6.1 FUNCIÓN VECTORIAL DE UNA VARIABLE REAL.

6.1.1 Definición.

Una ***FUNCIÓN VECTORIAL DE UNA VARIABLE REAL***, es una función del tipo $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\vec{F}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right) \in \mathbb{R}^n$$

Donde $x_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$; son funciones reales de variable real t, llamadas **Funciones Coordenadas** de $\vec{F}$.

Ejemplo 1

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(t) = \left(1-2t,\, 3+t,\, -1+t\right)$.

Ejemplo 2

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(t) = \left(a\cos t,\, bsent,\, t\right)$.

Ejemplo 3

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ tal que $\vec{F}(t) = \left(t,\, t^2,\, t^3,\, 2t+1\right)$

Ejemplo 4

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\vec{F}(t) = \left(t,\, t^2,\, 3\sqrt{1-\frac{t^2}{25}-\frac{t^4}{16}}\right)$

6.1.2 Dominio

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, el dominio de $\vec{F}$ es el subconjunto de números reales I.

En decir, el conjunto de valores para t, que da sentido a la regla de correspondencia.

Ejemplo 1

Para $\vec{F}(t) = \left(1-2t,\, 3+t,\, -1+t\right)$, $Dom\,\vec{F} = \mathbb{R}$

Ejemplo 2

Para $\vec{F}(t) = \left(a\cos t,\, bsent,\, t\right)$, $Dom\,\vec{F} = \mathbb{R}$

Ejemplo 3

Para $\vec{F}(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$, $Dom\,\vec{F}=\mathbb{R}$

Ejemplo 4

Para $\vec{F}(t)=\left(t,t^2,3\sqrt{1-\frac{t^2}{25}-\frac{t^4}{16}}\right)$, $Dom\,\vec{F}=\left\{t\in\mathbb{R}/1-\frac{t^2}{25}-\frac{t^4}{16}\geq 0\right\}$

6.1.3 LIMITE

6.1.3.1 Definición.

Sea $\vec{F}:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ una función definida en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ y sea t_0 un punto de I o un punto de frontera de I. Entonces $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\vec{L}$, si y sólo si:

$$\forall\xi>0,\exists\partial>0/\ 0<\left|t-t_0\right|<\partial\Rightarrow\left\|\vec{F}-\vec{L}\right\|<\xi$$

6.1.3.2 Teorema

Sea $\vec{F}:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, tal que $\vec{F}(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right)$.

Entonces $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\vec{L}=\left(l_1,l_2,\cdots,l_n\right)$ si y solo si

$$\lim_{t\to t_0}x_i=l_i;\quad i=1,2,\cdots,n$$

Ejemplo.

Sea $\vec{F}(t)=\left(t^2+1,\,2t,\,sent\right)$ Hallar $\lim\limits_{t\to 0}\vec{F}(t)$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\vec{F}(t)&=\left(\lim_{t\to 0}\left(t^2+1\right),\,\lim_{t\to 0}2t,\,\lim_{t\to 0}sent\right)\\&=\left(1,0,0\right)\end{aligned}$$

Ejercicios Propuesto 6.1

Calcular:

a) $\lim\limits_{t\to 2}\left(t,\frac{t^2-4}{t^2-2t},\frac{1}{t}\right)$ b) $\lim\limits_{t\to 0}\left(e^t,\frac{\operatorname{sen}t}{t},e^{-t}\right)$ c) $\lim\limits_{t\to 1}\left(\sqrt{t},\frac{\ln t}{t^2-1},2t^2\right)$

Resp. a) $\left(2,\,2,\,\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(1,1,1\right)$ c) $\left(1,\,\frac{1}{2},\,2\right)$

6.1.4 CONTINUIDAD.

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Entonces $\vec{F}$ es continua en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$

6.1.4.1 Teorema

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tal que $\vec{F}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right)$. Sea $t_0 \in I$. Entonces $\vec{F}$ es continua en t_0 si y sólo si sus funciones coordenadas x_i lo son.

Ejemplo 1

$\vec{F}(t) = \left(t^3+1, t^2-2t, sent\right)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} \left(t, t^2, \dfrac{sent}{t}\right) & ; t \neq 0 \\ (0,0,0) & ; t = 0 \end{cases}$$

No es continua en $t=0$ debido a que $\lim\limits_{t\to 0}\left(t, t^2, \dfrac{sent}{t}\right) = (0,0,1)$ que es diferente de $\vec{F}(0) = (0,0,0)$

Ejemplo 3

$\vec{F}(t) = \left(\dfrac{1}{(t+1)^2}, t^3\right)$ no es continua en $t=-1$.

Ejercicios Propuesto 6.2

Analice la continuidad de:

a) $r(t) = \left\langle \sqrt{t}, \sqrt{t-1} \right\rangle$

b) $r(t) = \left\langle t, \operatorname{arcsen} t, t-1 \right\rangle$

c) $r(t) = \left\langle 8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t} \right\rangle$

Resp. a) $Dom\ r(t) = [1,+\infty]$ b) $Dom\ r(t) = [-1,1]$ c) $Dom\ r(t) = [0,+\infty]$

6.2 TRAYECTORIA (CAMINO)

Una función $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua se la llama trayectoria o camino en $\mathbb{R}^n$ si $\vec{F}$ está definida en un intervalo cerrado.

Suponga que el intervalo sea $I = [a, b]$ entonces $\vec{F}(a)$ es el punto inicial de la trayectoria y $\vec{F}(b)$ es el punto final.

Si $\vec{F}(a) = \vec{F}(b)$ tenemos una **TRAYECTORIA CERRADA**.

Si $\vec{F}$ es inyectiva es una **TRAYECTORIA SIMPLE**.

Si $\vec{F}(a) = \vec{F}(b)$ y $\vec{F}$ es inyectiva tenemos una **TRAYECTORIA CERRADA SIMPLE**.

6.3 GRAFICA. DEFINICIÓN

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Se denomina gráfica de $\vec{F}$ al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$de la forma $\left(t, \vec{F}(t)\right)$ tales que $t \in I$.

Se ha dado esta definición siguiendo la línea de la definición de gráfica que se enunció en el capítulo anterior.

La definición siguiente permite darle una interpretación geométrica a una función vectorial de variable real.

6.4 TRAZA

Se llama ***TRAZA*** de la trayectoria $\vec{F}$ al conjunto de imágenes de $\vec{F}$, es decir:

$$Traza\, \vec{F} = \left\{ \vec{F}(t) \in \mathbb{R}^n \, / \, t \in I \right\}$$

6.5 CURVA

Se denomina ***CURVA*** a la traza de una trayectoria $\vec{F}$.

Conozcamos algunas curvas de $\mathbb{R}^3$.

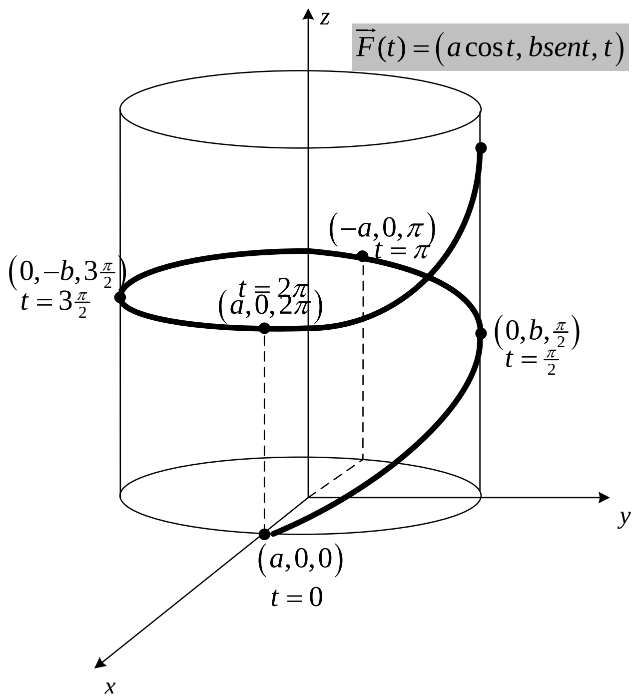
Ejemplo 1

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(t) = (a\cos t, bsent, t)$.

Esta curva es llamada HELICE.

Note que $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = bsent \\ z = t \end{cases}$

Se la pude observar como la traza que hace la superficie $x = a\cos z$ al cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

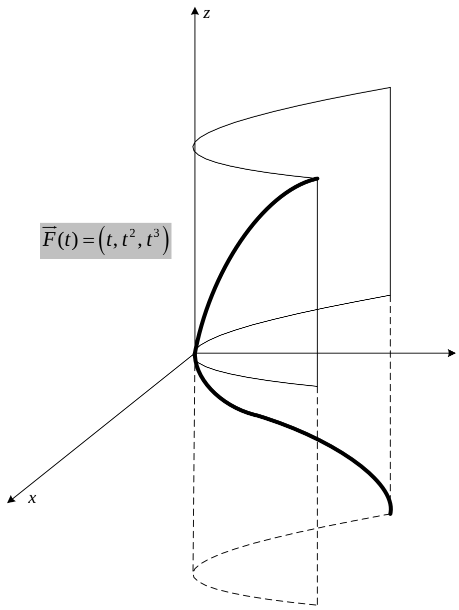


Ejemplo 2

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(t) = (t, t^2, t^3)$

Aquí tenemos $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$

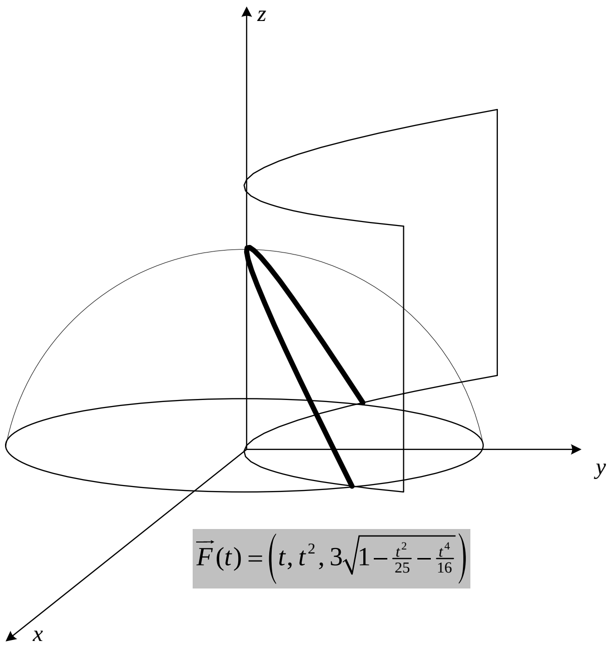
Esta curva la podemos observar como la intersección entre las superficies $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$



Ejemplo 3

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(t)=\left(t, t^2, 3\sqrt{1-\frac{t^2}{25}-\frac{t^4}{16}}\right)$

En este caso la curva será la intersección entre el elipsoide $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ con el cilindro $y=x^2$



Ejercicios Propuesto 6.3

1. Dibujar las siguientes curvas representadas por las funciones vectoriales propuestas.
   a) $r(t) = 3t\hat{i} + (t-1)\hat{j} + k$
   b) $r(t) = 2\cos t\hat{i} + 4\operatorname{sen} t\hat{j} + t\hat{k}$
   c) $r(t) = 3\cos t\hat{i} + 4\operatorname{sen} t\hat{j}$
2. Hallar trayectorias $r(t)$ que representen las siguientes curvas.
   a) $\{(x,y)/\, y = e^x\}$
   b) $\{(x,y)/\, 4x^2 + y^2 = 1\}$
   c) Una recta en IR^3 que contiene al origen y al punto (a,b,c).
   d) $\{(x,y)/\, 9x^2 + 16y^2 = 4\}$
   e) $\{(\rho,\theta,\phi)/(\rho = 6\csc\phi) \wedge (\theta = \pi/4)\}$
   f) $\{(\rho,\theta,\phi)/(\rho = 4\csc\phi) \wedge (\theta = \pi/4)\}$
3. Dibujar las curvas en el espacio representada por la intersección de las superficies propuestas, y represéntese la curva mediante la función vectorial usando el parámetro dado.

	Superficies	Parámetro
a)	$z = x^2 + y^2, x + y = 0$	$x = 2t$
b)	$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16, x = y^2$	$y = t$
c)	$x^2 + y^2 + z^2 = 10, x + y = 4$	$x = 2 + \operatorname{sen} t$
d)	$x^2 + z^2 = 4, y^2 + z^2 = 4$	$x = 3t$

4. Muestre que la intersección de la superficie $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$ y el plano $x + z = 9$ es una elipse.
5. Escriba una ecuación vectorial para la curva de intersección de las superficies: $e^{2x^2-5x} = z^2 + 2, \quad y^2 + y = xz^3$
6. La curva cuya ecuación vectorial es
   $$r(t) = \left\langle 2\sqrt{t}\cos t, 3\sqrt{t}\operatorname{sen} t, \sqrt{1-t}\right\rangle, \quad 0 \le t \le 1$$
   se define sobre una superficie cuádrica. Hallar la ecuación de dicha superficie.
   Resp. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$
7. Hallar la función vectorial para la curva de intersección de las superficies $z = 1 + x - y$, y $y = x^2 + x$.
   Resp. $r(t) = \left(t - \frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{4}, -t^2 + t + \frac{1}{4}\right)$

6.6 DERIVADA.

Una función $\vec{F} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Sea $t_0 \in I$. Entonces la derivada de $\vec{F}$ en t_0, denotada como $\vec{F}'(t_0)$, se define como:

$$\vec{F}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{F}(t_0 + h) - \vec{F}(t_0)}{h}$$

si este límite existe.

En tal caso se dice que $\overrightarrow{F}$ es ***DIFERENCIABLE*** en t_0.

Si $\overrightarrow{F}(t_0)=\left(x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0)\right)$ entonces

$$\overrightarrow{F}(t_0+h)=\left(x_1(t_0+h),x_2(t_0+h),\cdots,x_n(t_0+h)\right).$$

Aplicando la definición de derivada

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}'(t_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{F}(t_0+h)-\overrightarrow{F}(t_0)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x_1(t_0+h),x_2(t_0+h),\cdots,x_n(t_0+h)\right)-\left(x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0)\right)}{h}\\
&=\left(\lim_{h\to 0}\frac{x_1(t_0+h)-x_1(t_0)}{h},\lim_{h\to 0}\frac{x_2(t_0+h)-x_2(t_0)}{h},\cdots,\lim_{h\to 0}\frac{x_n(t_0+h)-x_n(t_0)}{h}\right)
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\overrightarrow{F}'(t_0)=\left(x_1'(t_0),x_2'(t_0),\cdots,x_n'(t_0)\right)$$

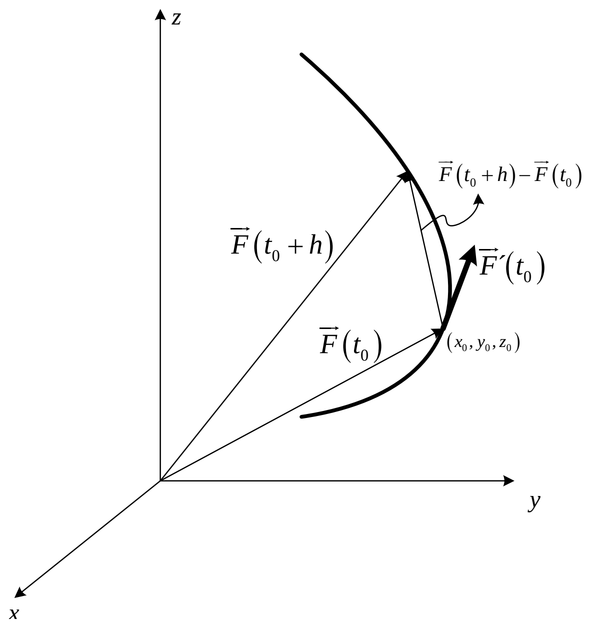
Ejemplo

Sea $\overrightarrow{F}(t)=\left(t^2,t,sent\right)$ entonces $\overrightarrow{F}'(t)=\left(2t,1,\cos t\right)$

6.6.1 Teorema

Sea $\overrightarrow{F}$ una trayectoria diferenciable. El vector $\overrightarrow{F}'(t_0)$ es tangente a la trayectoria en el punto t_0.

Observe la gráfica



Ejemplo

Sea $\vec{F}(t)=(\cos t, sent, t)$. Hallar la ecuación de la recta tangente y la del plano normal en $t=\frac{\pi}{4}$.

SOLUCIÓN:

Un vector directriz de la recta tangente seria $\vec{F}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, que también sería un vector perpendicular al plano normal.

Como $\vec{F}(t)=(\cos t, sent, t)$ entonces $\vec{F}'(t)=(-sent, \cos t, 1)$

Tenemos un punto: $\vec{F}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{4}, sen\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

Y un vector paralelo a la recta o perpendicular al plano normal:

$$\vec{F}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-sen\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}, 1\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente sería:

$$l:\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ z=\frac{\pi}{4}+t \end{cases}$$

Y la ecuación del plano normal sería:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

6.6.2 Trayectoria Regular

Sea $\vec{F}: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. Entonces $\vec{F}$ es una trayectoria regular en I, si $\vec{F}'(t_0)\neq\vec{0}$ para todo $t\in I$.

6.6.3 Propiedades

Sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ dos trayectorias diferenciables. Sea f una función escalar diferenciable. Entonces:

1. $D_t\left(\vec{F}(t)\pm\vec{G}(t)\right)=\vec{F}'(t)\pm\vec{G}'(t)$
2. $D_t\left(f\,\vec{F}(t)\right)=f'\,\vec{F}(t)+f\,\vec{F}'(t)$
3. $D_t\left(\vec{F}(t)\bullet\vec{G}(t)\right)=\vec{F}'(t)\bullet\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\bullet\vec{G}'(t)$
4. $D_t\left(\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right)=\vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$

6.7 CONCEPTOS ASOCIADOS A LA DERIVADA.

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Tal que $\vec{F}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right)$

Se define:

Vector Posición: $\vec{r}(t) = \vec{F}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right)$

Vector Velocidad: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \left(x_1'(t), x_2'(t), \cdots, x_n'(t)\right)$

Vector Tangente Unitario: $\mathrm{T} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|}$

Longitud de un camino:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[x_1'(t)\right]^2 + \left[x_2'(t)\right]^2 + \cdots + \left[x_n'(t)\right]^2}\,dt$$

Rapidez: $\dfrac{ds}{dt} = \left\|\vec{v}(t)\right\| = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|$

Aceleración: $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = \left(x_1''(t), x_2''(t), \cdots, x_n''(t)\right)$

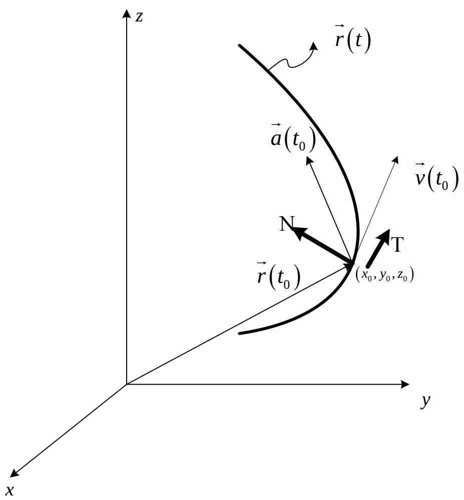
Vector Normal Unitario: $\mathrm{N} = \dfrac{\vec{\mathrm{T}}'(t)}{\left\|\vec{\mathrm{T}}'(t)\right\|}$

Vector Binormal: $\mathrm{B} = \mathrm{T} \times \mathrm{N}$

Plano Osculador: Definido por T y N y ortogonal a B

Plano Rectificante: Definido por T y B y ortogonal a N

Plano Normal: Definido por N y B y ortogonal a T



El vector tangente es unitario, entonces: $\mathrm{T}\bullet\mathrm{T}=1$, derivando miembro a miembro

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{T}\bullet\mathrm{T}\right)=\frac{d}{dt}(1)$$
$$\mathrm{T}'\bullet\mathrm{T}+\mathrm{T}\bullet\mathrm{T}'=0$$
$$2\mathrm{T}'\bullet\mathrm{T}=0$$
$$\mathrm{T}'\bullet\mathrm{T}=0$$

Por tanto se concluye que el vector T y T' son ortogonales, lo cual demuestra la definición del Vector Normal Unitario.

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano osculador para $\vec{r}(t)=(\cos t, sent, t)$ en $t=\pi$.

SOLUCIÓN:

Para hallar la ecuación de un plano necesitamos un punto y un vector normal.

El punto sería: $\vec{r}(\pi)=(\cos\pi, sen\pi, \pi)=(-1,0,\pi)$

Y el vector normal es el vector Binormal: $\mathrm{B}=\mathrm{T}\times\mathrm{N}$

Hallemos T:

$$\mathrm{T}=\frac{\vec{r}\,'(\pi)}{\left\|\vec{r}\,'(\pi)\right\|}=\left.\frac{(-sent,\cos t,1)}{\sqrt{\underbrace{sen^2t+\cos^2 t}_{1}+1}}\right|_{t=\pi}=\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}$$

Hallemos N:

$$\mathrm{N}=\frac{\vec{\mathrm{T}}'(\pi)}{\left\|\vec{\mathrm{T}}'(\pi)\right\|}=\left.\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t,-sent,0)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2 t+sen^2t}}\right|_{t=\pi}=(1,0,0)$$

Entonces

$$\mathrm{B}=\mathrm{T}\times\mathrm{N}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Finalmente la ecuación del plano osculador sería:

$$0(x+1)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(y-0)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(z-\pi)=0$$

6.7.1Teorema. Formulas de Frenet- Serbet

Sea $\vec{r}$ una trayectoria diferenciable, entonces:

$$\mathrm{B}=\mathrm{T}\times\mathrm{N}=-\mathrm{N}\times\mathrm{T}$$
$$\mathrm{N}=\mathrm{B}\times\mathrm{T}=-\mathrm{T}\times\mathrm{B}$$
$$\mathrm{T}=\mathrm{N}\times\mathrm{B}=-\mathrm{B}\times\mathrm{N}$$

6.7.2 Curvatura y radio de curvatura.

Sea $\vec{r}$ una trayectoria diferenciable. La ***CURVATURA***, denotada por κ, está definida en la expresión: $\frac{d\mathrm{T}}{ds} = \kappa\mathrm{N}$.

Es decir: $\kappa = \left\| \frac{d\mathrm{T}}{ds} \right\|$

El radio de curvatura, denotado por ρ, es:

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

Observe que

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathrm{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathrm{T}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathrm{T}/dt}{ds/dt} \right\|$$

Es decir, $\kappa = \frac{\left\| \mathrm{T}'(t) \right\|}{\left\| r'(t) \right\|}$

Ejemplo

Hallar κ para $\vec{r}(t) = (\cos t, sent, t)$ en $t = \pi$.

SOLUCIÓN:

La curvatura en este punto sería: $\kappa = \frac{\left\| \mathrm{T}'(\pi) \right\|}{\left\| r'(\pi) \right\|}$

En el ejemplo anterior se obtuvo $\left\| \mathrm{T}'(\pi) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\left\| \vec{r}\,'(\pi) \right\| = \sqrt{2}$

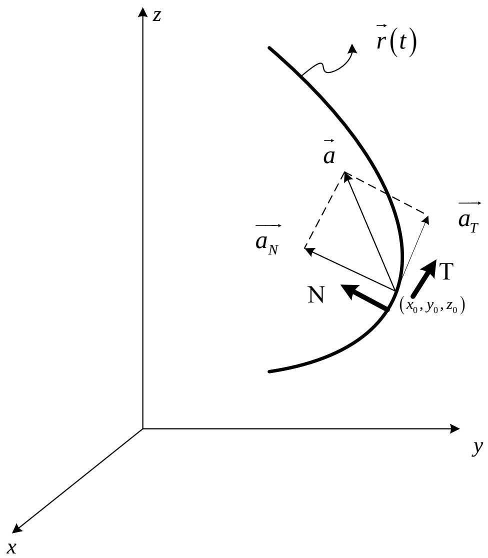
$$\kappa = \frac{\left\| \mathrm{T}'(\pi) \right\|}{\left\| r'(\pi) \right\|} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

6.7.3 Torsión.

Sea $\vec{r}$ una trayectoria diferenciable. La ***TORSIÓN***, denotada por τ, está definida en la expresión: $\frac{d\mathrm{B}}{ds} = -\tau\mathrm{N}$. Es decir: $\tau = \left\| \frac{dB}{ds} \right\|$

6.7.4 ACELERACIÓN NORMAL Y ACELERACIÓN TANGENCIAL.

En cuestiones físicas, se hace necesario presentar la aceleración en términos de sus componentes tangencial y ortogonal en un punto de la trayectoria.



$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_T + \vec{a}_N \\ &= a_t \mathrm{T} + a_n \mathrm{N}\end{aligned}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}\right] = \frac{d}{dt}\left[\left\|\vec{v}\right\|\mathrm{T}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\mathrm{T}\right] = \frac{d^2 s}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{ds}{dt}\mathrm{T}'$$

Deduzcamos T':

En la expresión $\frac{d\mathrm{T}}{ds} = \kappa\mathrm{N}$, transformando $\frac{d\mathrm{T}}{ds}$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \kappa\mathrm{N}$$

$$\frac{d\mathrm{T}/dt}{ds/dt} = \kappa\mathrm{N}$$

Es decir: $\boxed{\mathrm{T}' = \kappa\frac{ds}{dt}\mathrm{N}}$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{ds}{dt}\mathrm{T}' \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{ds}{dt}\left(\kappa\frac{ds}{dt}\mathrm{N}\right) \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathrm{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathrm{N}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{a_t = \frac{d^2s}{dt^2}} \quad \text{y} \quad \boxed{a_n = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}$$

Ejemplo

Sea $\vec{r}(t) = (\cos t, sent, t)$. Hallar a_t y a_n $t = \pi$.

SOLUCIÓN:

Empleando los resultados anteriores

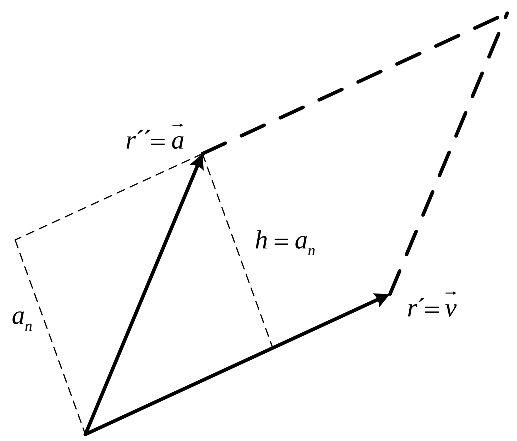
1. $\frac{ds}{dt} = \left\|\vec{r}'(\pi)\right\| = \sqrt{2}$ entonces $\boxed{a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = 0}$

2. La curvatura ya la obtuvimos en el ejercicio anterior, por tanto:

$$\boxed{a_n = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1}$$

En ocasiones determinar los parámetros anteriores no es tan sencillo debido a la ecuación de la trayectoria. Podemos darles otra forma a las formulas anteriores.

Observe la figura:



Por teoría de vectores:

El área del paralelogramo sustentado por los vectores $r' = \vec{v}$ y $r'' = \vec{a}$ está dada por:

$$Area = \left\| \vec{r}' \times \vec{r}'' \right\|$$

Pero, por geometría también tenemos:

$$Area = (base) \times (altura) = \left\| \vec{r}' \right\| a_n$$

Igualando y despejando resulta:

$$\boxed{a_n = \frac{\left\| \vec{r}' \times \vec{r}'' \right\|}{\left\| \vec{r}' \right\|}}$$

Para la curvatura tenemos:

$$\kappa = \frac{a_n}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{\left\| \vec{r}' \times \vec{r}'' \right\|}{\left\| \vec{r}' \right\|}}{\left\| \vec{r}' \right\|^2} = \frac{\left\| \vec{r}' \times \vec{r}'' \right\|}{\left\| \vec{r}' \right\|^3}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{\left\| \vec{r}' \times \vec{r}'' \right\|}{\left\| \vec{r}' \right\|^3}}$$

Ejemplo

Sea $\vec{r}(t) = (4t, 3\cos t, sent)$. Hallar $\vec{v}$, $\vec{a}$, a_t, a_n, κ, para cualquier t.

Solución:

$$\vec{v} = \vec{r}'(t) = (4, -3sent, \cos t)$$

$$\vec{a} = \vec{r}''(t) = (0, -3\cos t, -sent)$$

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \vec{r}'(t) \right\| = \sqrt{16 + 9sen^2 t + \cos^2 t}$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3sent & \cos t \\ 0 & -3\cos t & -sent \end{vmatrix} = \left(3sen^2 t + 3\cos^2 t,\ 4sent,\ -12\cos t\right) = (3,\ 4sent,\ -12\cos t)$$

$$a_n = \frac{\left\| \vec{r}' \times \vec{r}'' \right\|}{\left\| \vec{r}' \right\|} = \frac{\sqrt{9 + 16sen^2 t + 144\cos^2 t}}{\sqrt{16 + 9sen^2 t + \cos^2 t}}$$

$$\kappa = \frac{\left\| \vec{r}' \times \vec{r}'' \right\|}{\left\| \vec{r}' \right\|^3} = \frac{\sqrt{9 + 16sen^2 t + 144\cos^2 t}}{\left(\sqrt{16 + 9sen^2 t + \cos^2 t}\right)^3}$$

Finalmente, también se podría utilizar el teorema de Pitágora para determinar la magnitud de una de las aceleraciones:

$$\left\|\vec{a}\right\|^2 = a_n{}^2 + a_t{}^2$$

Ejercicios Propuestos 6.4

1. Halle $\sigma'(t)$ y $\sigma'(0)$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $\sigma(t) = \left(\operatorname{sen} 2\pi t, \cos 2\pi t, 2t - t^2\right)$ c) $\sigma(t) = \left(t^3, t^2 - 4t, 0\right)$

   b) $\sigma(t) = \left(e^t, \cos t, \operatorname{sen} t\right)$ d) $\sigma(t) = \left(\operatorname{sen} 2t, \log(1+t), t\right)$

   Resp. a) $\sigma'(0) = (2\pi, 0, 2)$ b) $\sigma'(0) = (1,0,1)$ c) $\sigma'(0) = (0,-4,0)$

   d) $\sigma'(0) = \left(2, \frac{1}{\ln 10}, 1\right)$

2. Un punto situado en la rosca de un tornillo, que se enrosca en una viga describe una hélice circular, siendo t el ángulo de giro del tornillo, a el radio del tornillo y b la elevación correspondiente al giro de una vuelta. Determine la velocidad y el vector aceleración del movimiento del punto.

   Resp. $r'(t) = \left(-a\,sent, a\cos t, \frac{b}{2\pi}\right)$ $r''(t) = \left(-a\cos t, -a\,sent, 0\right)$

3. El movimiento de una partícula está definido por $R(t) = at\left(\cos t\hat{i} - \operatorname{sen} t\hat{j}\right)$. Hállese su velocidad, las componentes tangencial y normal de la aceleración en $t = \pi/2$.

4. La posición de una partícula móvil en el tiempo t viene dada por $r(t) = \left(t^2 - 6t\right)\hat{i} + 5t\hat{j}$. Calcule el instante en que la rapidez de la partícula es mínima.

   Resp. $t = 3$

5. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas siguientes en el valor especificado de t.

   a) $r(t) = \left\langle 6t, 3t^2, t^3\right\rangle, \quad t = 0$

   b) $r(t) = \left\langle \operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{3/2}\right\rangle, \quad t = 1$

   Resp. a) $r'(0) = (6,0,0)$; $r''(0) = (0,6,0)$; $l: \begin{cases} x = 6t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

   b)

6. Sea una partícula de 1 gramo de masa, que sigue la trayectoria $r(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t\rangle$, con unidades en segundos y centímetros. ¿Qué fuerza actúa sobre ella en $t = 0$?

   Nota: $F = m.a$

   Resp. $F = 10^{-5}(-1,0,0)$ N

7. Sea $\sigma(t)$ una trayectoria en IR^3 con aceleración cero. Probar que σ es una recta o un punto.

8. Suponer que una partícula sigue la trayectoria $r(t) = \left(e^t, e^{-t}, \cos t\right)$ hasta que sale por una trayectoria tangente en $t = 1$. ¿Dónde está en $t = 2$?

   Resp. $(2e,\ 0,\ \cos 1 - sen 1)$

9. Una partícula se mueve sobre la curva C que se obtiene de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = y$. Obtener la ecuación de la trayectoria que describiría la partícula si se separase de la curva C en el punto $\left(\sqrt{2}/2, 1/2, 1/2\right)$

Resp. $l:\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2} \end{cases}$

10. Calcular la curvatura y la componente normal de la aceleración de la curva $r(t)=\left\langle \cos t, e^{2t}, (t+1)^3 \right\rangle, \quad para \quad t=0$

Resp. $k=\frac{1}{13}$ $\quad \vec{a}_N=(-1,0,0)$

11. Encontrar las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a la curva $x=6\operatorname{sen} t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\operatorname{sen} 5t$ en el punto $t=\pi/4$

Resp.

12. El movimiento de una partícula está representado por la función $r(t)=\left\langle \frac{5}{2}t^2-1, t^3, 2t \right\rangle, \quad t\geq 0$. En el tiempo $t=1$, la partícula es expulsada por la tangente con una rapidez de 12 unidades por segundo. ¿A qué tiempo y por qué punto atraviesa al paraboloide $z^2+y^2=4x$?

Resp. $t=0{,}30389$ seg. $\quad P\left(\frac{69}{26}+\frac{5\sqrt{22}}{13}, \frac{22+3\sqrt{22}}{13}, \frac{32+2\sqrt{22}}{13}\right)$

13. Dada la curva $r(t)=\left\langle e^{-2t}, e^{2t}, 2\sqrt{2}\ t \right\rangle,$ Encontrar la curvatura y las ecuaciones de las rectas tangente y normal en $t=0$

Resp.

14. Hallar la función vectorial para la curva de intersección entre el cilindro $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=2$ y el plano $y=5z$. Encontrar la curvatura en el punto (2,5,1).

Resp. $r(t)=\left(2\sqrt{2}\cos t,\ 5\sqrt{2}sent,\ \sqrt{2}sent\right); \quad k=\frac{2}{15}\sqrt{\frac{13}{15}}$

15. Una partícula se mueve suponiendo la trayectoria $r(t)=\left\langle t^2, t^3-4t, 0 \right\rangle$ en t=2 seg sale por la tangente. Calcular la posición y la velocidad de la partícula en t=3 seg.

Resp. $r\acute{}(2)=(4,8,0)$ $\quad l(3)=(8,8,0)$

16. Calcular la longitud de arco descrito por el vector $r(t)=\left\langle 3\cos t, -3\operatorname{sen} t, -t^2 \right\rangle, \quad 0\leq t\leq 2$.

Resp. $L=5+\frac{9}{4}\ln 3$

17. Una partícula se mueve por la trayectoria $\sigma(t)=\left(\cos t^2, \frac{1}{\sqrt{2}}sent^2, -\frac{1}{\sqrt{2}}sent^2\right)$ desde $t=1$seg hasta $t=3\sqrt{\pi}$ seg. En $t=3\sqrt{\pi}$ seg la aceleración normal deja de actuar, y la partícula sale disparada tangencialmente a σ . Calcular la posición de la partícula 1 seg después que deja de actuar la aceleración normal.

Resp. $\left(-1,-3\sqrt{2\pi},3\sqrt{2\pi}\right)$