ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

MANUAL PRACTICO DE ESTADISTICA BASICA Y DISEÑO EXPERIMENTAL APLICADOS A LA ACUICULTURA

Fabrizio Marcillo M.

1992

INDICE

CAPITULO II

CAPITULO III

CAPITULO IV

CAPITULO V

CAPITULO VI

CAPITULO VII

CAPITULO VIII

CAPITULO IX

CAPITULO X

INTRODUCCION

Este manual es una recopilación de varios procesos y métodos estadísticos expresados de una manera práctica e inteligible para personas con pocos conocimientos de matemática teórica.

No es intención de esta obra dar una explicación detallada y profunda de los procesos matemáticos que involucran las suposiciones y cálculos estadísticos, sino más bien dar una guía práctica sobre los cálculos a realizar en determinada situación, dando una idea general de lo que es diseño experimental.

Los métodos descritos en este libro son de estadística general, y por lo tanto pueden ser usados en distintas situaciones; sin embargo, como el curso está programado especialmente para ser usado en acuicultura, los ejercicios acompañados en el anexo corresponden a esta área.

Los tópicos a tratar en este texto entrarán dentro de 4 grupos principales :

- Conceptos y definiciones básicas de estadística, así como ciertas suposiciones que vamos a hacer a lo largo del mísmo.
- Teoría de probabilidades y distribuciones teóricas de las mísmas.
- Diseño experimental, basado en gran parte en la lógica y en el sentido común, así como en los conceptos básicos y la teoría que vayamos revisando.
- Cálculos aritméticos y tablas numéricas, que realizadas de forma más bien rutinaria y mecánica después de haber definido el problema que tenemos, nos darán los materiales sobre los cuales se van a basar las inferencias y medir la incertidumbre.

Los objetivos básicos del libro son entonces: Dar bases para reconocer un problema identificando el tipo de cálculo a realizar. Y, fomentar una forma de pensar clara y disciplinada, especialmente cuando se trata de recolectar e interpretar información numérica.

Definiremos **Estadística** como: " La ciencia pura y aplicada (no exacta) que crea, desarrolla y aplica técnicas de modo que pueda evaluarse la incertidumbre.
La misma no es nueva , ya que desde edades antiguas se la usaba, principalmente en los conocidos censos.
Posteriormente (siglo XVII) se desarrolló la teoría de probabilidades, basada en los juegos de azar.
Muchas teorías, principalmente de carácter biológico como las de Mendel o Darwin tuvieron bases estadísticas.
Sin embargo la mayoría de los métodos de estadística moderna que se utilizan actualmente, no se desarrollaron hasta mediados del siglo XIX y principios del XX,

principalmente para uso en biología, agricultura y genética.
Es interesante este punto, ya que al ser desarrollados estos métodos precisamente para ser usados en ciencias biológicas, ellos toman en cuenta la variabilidad propia de poblaciones naturales en sus cálculos y tablas.

CAPITULO I

MANEJO DE DATOS

1.1.- Datos.-

Llamamos **dato** a cualquier **observación** (valor numérico o cualitativo) que mida una característica o atributo (**variable**) de individuos. En otras palabras, a los valores experimentales que va a tomar una variable determinada.

Los datos estadísticos, obtenidos de **muestras**, experimentos o cualquier colección de mediciones, a menudo son tan numerosos que carecen de utilidad a menos que sean condensados o reducidos a una forma más adecuada. Por ello, en esta sección nos ocuparemos del agrupamiento de datos, así como de ciertos estadísticos o medidas que representarán el significado general de nuestros datos.

1.2.- Variables.-

Llamamos **variable** a una propiedad con respecto a la cual los individuos de una muestra se diferencian en algo verificable.

Variables **mensurables** son aquellas cuyos diferentes valores pueden ser expresados de manera numérica; por ejemplo, el peso y la longitud.

Variables **ordinales** son aquellas que pueden ser expresadas en orden de magnitud; por ejemplo, los grados de madurez o de llenura.

Atributos son aquellas variables que no pueden ser medidas, pero pueden ser expresadas cualitativamente. Ellos representan propiedades; por ejemplo, el color.

Variables **discretas** son aquellas cuyo conjunto de posibles valores son fijos, y no pueden tomar valores intermedios.

Definimos como variables **continuas** a aquellas cuyo conjunto de posibles valores puede alcanzar un número infinito entre dos valores cuales quiera.

Llamamos variables **independientes** a aquellas cuyo valor no depende de otra variable; matemáticamente, K variables aleatorias son independientes, si y solo si se cumple lo siguiente:

$$F(x_1,x_2,..x_n)=F_1(x_1).F_2(x_2)..F_n(x_n)$$

para todos los valores de estas variables en los cuales las funciones están definidas.

Llamamos variables **dependientes** a aquellas cuyo valor va a depender de otra función o, matemáticamente, si no cumple la condición anterior.

1.3.- Población y muestras.-

Llamamos **población** (estadística) al grupo de individuos bajo estudio, osea al conjunto de objetos, mediciones u observaciones del cual tomamos nuestra **muestra**.

Una población puede ser finita o infinita, dependiendo de su tamaño.

Conociendo la **distribución de frecuencias** de algúna característica (variable) de la población, es posible describirla por medio de una **función de densidad**, la cual a su vez vendrá caracterizada por ciertos **parámetros.**

Al ser la población completa generalmente muy grande para ser estudiada en su totalidad, resulta más conveniente estudiar solo un subconjunto de dicha población.

Sea una variable aleatoria dada (X); los valores de esta variable aleatoria (X_1, X_2,...X_n) forman una muestra de la variable X, si ellas son independientes y **siguen la misma distribución de X**, en otras palabras, si representa fielmente a X.

El objetivo de los muestreos es obtener información sobre las **distribuciones de frecuencia** de la población o más preciso de los **parámetros poblacionales.**

1.4.- Distribución de frecuencias.-

La distribución de frecuencias es una operación mediante la cual dividimos un conjunto de datos en un número de clases apropiadas, mostrando también el número de elementos en cada clase.

La primera etapa en la construcción de una distribución de frecuencias consiste en decidir cuántas clases utilizar, y elegir los límites de cada clase. En general, el número de clases dependerá del número y rango de los datos. Matemáticamente, el número de intervalos (k) viene dado por la siguiente fórmula:

$$k = 1 + \frac{10}{3} \ln N$$

aunque siempre hay que ver qué tan bien representa ésto la veracidad de los datos. Empíricamente, se recomienda usar un número de intervalos no menor que 5 o mayor que 15.

Llamamos intervalo de representación al intervalo donde se representan los datos.

Intervalo real son los verdaderos límites del intervalo de representación, y viene dado por el punto medio entre los límites de dos intervalos de representación consecutivos.

Definimos la marca de clase como el punto medio entre el límite superior y el inferior de un intervalo de representación.

La frecuencia es la cantidad de ocurrencias de datos dentro de un intervalo de representación.

La frecuencia relativa es la relación entre la frecuencia de un intervalo y la frecuencia total expresada en porcentaje.

La frecuencia acumulada y acumulada relativa es la sumatoria del número de ocurrencias o porcentajes de todos los intervalos menores o iguales al presente.

Por ejemplo, con los siguientes datos de longitud cefálica en:

Tilapia nilótica:

29.0	29.0	27.0	28.2	28.9	26.1	28.4
29.4	28.2	26.0	29.5	27.4	25.3	26.0
27.0	27.6	26.0	29.7	29.8	26.3	28.5
30.2	27.0	28.0	31.0	25.6	33.4	28.0
29.0	28.0	29.5	26.4	27.3	29.3	26.0
28.0	26.0	29.5	29.5	29.4	26.6	26.4
28.0	27.7	28.1	27.6	26.8	27.0	29.3
28.0	27.0	31.0	27.0	27.0	28.9	29.3

Construímos una tabla parecida a la siguiente:

Intervalo Representación	Intervalo Real	Frecuencia	Frecuencia Relativa	Frecuencia Acumulada	F. Acumulada Relativa	Marca de Clase
24 - 25	23.5 - 25.5	2	3.57 %	2	3.57 %	24.5
26 - 27	25.5 - 27.5	19	33.93 %	21	37.50 %	26.5
28 - 29	27.5 - 29.5	29	51.79 %	50	89.29 %	28.5
30 - 31	29.5 - 31.5	5	8.93 %	55	28.22 %	30.5
32 - 33	31.5 - 33.5	1	1.78 %	56	100.00 %	32.5

1.5.- Gráficos.-

Las propiedades de las distribuciones de frecuencias relacionadas con su forma se hacen más evidentes por medio de gráficos.

FIGURA # 1.- Histograma de frecuencias absolutas.

La forma más común de representar una distribución de frecuencia es el histograma, en el cual el área de los rectángulos representan las frecuencias de clase, y sus bases se extienden en las fronteras de los intervalos reales. En este tipo de gráfico, las marcas de clase están situadas en la mitad del rango del rectángulo. Mediante este gráfico podemos representar la frecuencia o la frecuencia relativa (Figuras # 1 y # 2), pero no la frecuencia acumulada o acumulada relativa.

Otros gráficos similares a los histogramas son los diagramas de barras (figura # 3); aquí, las alturas y no las áreas representan las frecuencias de clase, y no se pretende fijar ninguna escala horizontal continua; en otras palabras, el ancho de las barras no interesa. Por esto se pueden graficar tanto las frecuencias absolutas o relativas, así como las acumuladas.

FIGURA # 2.- Histograma de frecuencias relativas.

Otra forma de presentar las distribuciones de frecuencia en forma gráfica es el polígono de frecuencias. En él, las frecuencias de clases son graficadas sobre las marcas de clase y unidas mediante líneas rectas. Además, agregamos valores correspondientes a cero en los puntos límites de la distribución.

Con estos gráficos podemos representar indistintamente las frecuencias netas o acumuladas; sin embargo, cuando graficamos estas últimas, en vez de utilizar las marcas de clase como abscisas utilizamos el límite superior del intervalo real de frecuencia (Figuras # 4 y 5).

FIGURA # 3.- Gráfico de barras de frecuencia absoluta

Para presentar datos de frecuencias relatívas, el gráfico de sectores o "pie" se usa con mucha frecuencia (Figura # 6). Este corresponde a un círculo dividido en varios sectores, correspondiendo cada uno a un intervalo, y en donde el área de cada sector es proporcional a la frecuencia relativa.

1.6.- Estadísticos.-

La mayoría de las investigaciones estadísticas se proponen generalizar a partir de la información contenida en **muestras aleatorias** acerca de la **población** de donde fueron obtenidas.

FIGURA # 4.- Polígono de frecuencias absolutas.

En general, trataremos de hacer inferencias sobre los **parámetros de las poblaciones** (por ejemplo la media μ o la varianza σ^2).

Para efectuar tales inferencias utilizaremos **estadísticos muestreales** como x y s^2; es decir cantidades calculadas con base en **datos** u observaciones de la **muestra.**

FIGURA # 5.- Polígono de frecuencias acumuladas

1.6.1.- Estadísticos de centralización.-

Podemos definir al **parámetro media poblacional** μ como la media aritmética de todos los individuos de nuestra población, y representa la esperanza matemática de nuestra variable aleatoria:

FIGURA # 6.- Gráfico de sectores

Este **parámetro** no lo conocemos, y no lo conoceremos nunca a no ser que muestreáramos la población completa. Es por esto que para estimar este parámetro utilizamos el **estadístico promedio** o media muestreal.

Nuestro promedio x va a estar dado por la media aritmética de los datos de nuestra muestra. Su fórmula es:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

Otros estadísticos de centralización son la moda y la mediana.

La **moda** corresponde a la marca de clase del intervalo de clases con mayor frecuencia. En términos aproximados, es el valor que mas encontramos en nuestro muestreo.

La **mediana** correspondería al valor del dato que se encuentra más cercano a la mitad si ordenáramos nuestros datos, o al valor del dato que tiene igual número de datos mayores de el que menores de él.

La mediana viene dada por el valor del dato número (n+1)/2 cuando n es impar y por la media del dato# (n/2) y el dato# (n/2 +1) cuando n es par.

1.6.2.- Estadísticos de dispersión.-

Las medidas de centralización nos dan una idea de hacia dónde están distribuidos nuestros datos, pero no de cómo están distribuídos. Para ésto tenemos las medidas de dispersión.

El **parámetro varianza poblacional** σ^2 mide el promedio de los cuadrados de las desviaciones de todos los valores de una variable de una población con respecto a la media poblacional. Este parámetro equivale a la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}$$

La **varianza empírica** s^2 es el **estadístico** mediante el cual hacemos estimaciones de nuestro **parámetro** varianza poblacional. Debido a que la varianza empírica es un estimador sesgado de la varianza poblacional, el cálculo de la misma va a estar dada por:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Nótese que a medida que el tamaño de la muestra (n) aumenta, la diferencia entre σ^2 y s^2 disminuye.

La **desviación típica** o desviación estándar (σ o s), no es otra cosa que la raíz cuadrada positiva de la varianza.

El **rango** es la diferencia entre el valor de nuestro mayor dato y el valor de nuestro menor dato.

CAPITULO II

TEORÍA DE PROBABILIDADES

Eventos que son "comunes" o "improbables" son aquellos cuya probabilidad de ocurrencia son grandes o pequeñas, respectivamente.

Sin darnos cuenta, nosotros calculamos empíricamente la probabilidad de todas los sucesos que nos rodean; así, determinamos que tan "común" o "raros" son ciertos acontecimientos.

Los estadísticos remplazan las palabras informativas pero imprecisas como "con dificultad", "pudo" o "casi con seguridad" por un número que va de 0 a 1, lo cual indica de forma precisa que tan probable o improbable es el evento.

Logicamente, haciendo inferencias a partir de muestras sobre una población, es decir de una parte sobre el todo, no podemos esperar llegar siempre a resultados correctos, pero la estadística nos ofrece procedimientos que nos permiten saber cuantas veces acertamos "en promedio". Tales enunciados se conocen como **enunciados probabilísticos.**

2.1.- Espacio Muestral.-

Llamamos **espacio muestreal** al conjunto universal de una población o a todos los valores probables que nuestra variable aleatoria puede tomar.

Enumerar todos los posibles sucesos del espacio muestreal de una población dada puede ser tedioso y, en algunos casos, hasta imposible. En la práctica, la mayoría de los problemas no requieren de una enumeración completa, y basta con saber el número total de sucesos posibles del espacio muestreal.

Para contar los números de sucesos posibles sin tener que enumerarlos uno por uno, existen como reglas generales la ley de la multiplicación y las reglas de las permutaciones y combinaciones.

2.2.- Ley de la multiplicación

Si A_1, A_2,... A_n son *n* acciones distintas que se pueden realizar de K_1, K_2,... K_n maneras, el total de maneras que se puede efectuar A_1, A_2,... A_n viene dado por:

$$k_1 x\, k_2 x\, k_3 x \ldots k_n$$

2.3.- Permutaciones y combinaciones

Cualquier disposición **ordenada** de *r* elementos de un conjunto con *n* elementos (donde $r \leq n$) se llama permutación.

El número total de permutaciones de *r* objetos escogidos entre un conjunto de *n* objetos viene dado por:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Lo mismo que no es más que un caso especial de la ley de la multiplicación.

Una elección de *r* elementos de un conjunto de *n* elementos distintos, **sin atender a un orden** se llama combinación.

El número total de combinaciones de *r* objetos escogidos entre un conjunto de *n* objetos viene dado por:

$$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

2.4.- Definición de probabilidad

Si un evento puede ocurrir de ***N*** maneras mutuamente exclusivas e igualmente posibles, y si ***n*** de ellas tienen una característica ***E***, entonces, la posibilidad de ocurrencia de ***E*** es la fracción ***n/N*** y se indica por:

$$\mathrm{P}(E) = \frac{n}{N}$$

En otras palabras, la probabilidad de que ocurra un evento determinado (exito) es la razón de el número de exitos posibles por el número de total de eventos distintos posibles (exitos mas fracsos).
Cabe anotar que la definición de exito o fracaso no tiene ninguna relación con la bondad del suceso, y es asignada de acuerdo a nuestras necesidades.

En general, para sucesos en los cuales el tamaño del espacio muestral nos sea desconocido o infinito, cuando no podamos enumerar la cantidad total de exitos, o en el caso de que las ***N*** maneras en que puede ocurrir el evento no sean igualmente posibles, se define la probabilidad de un evento como la proporción de las veces que eventos de la misma clase ocurren al repetir muchas veces el experimento en condiciones parecidas, y esta es la definición que más usaremos en este texto.

2.5.- Teoremas básicos

- La probabilidad de un evento cualquiera va a estar en el rango de cero a uno.

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

- La suma de la probabilidad de ocurrencia de un evento mas la probabilidad de no ocurrencia del mismo es igual a uno.

$$P(E) + P(\neg E) = 1$$

- Para dos eventos cualesquiera A y B, la probabilidad de que ocurra A o B viene dado, por la probabilidad de que ocurra A, mas la probabilidad de que ocurra B, menos la probabilidad de que ocurran ambos.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

CAPITULO III

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Una distribución o **densidad de probabilidad** de una variable aleatoria **x** es la función de distribución de la probabilidad de dicha variable o, en otras palabras, la probabilidad de que dicha variable tome ciertos valores. Estas distribuciones de probabilidad pueden ser discretas o continuas, de acuerdo con el tipo de variable al cual representen.

Hay infinidad de distribuciones de densidad, una para cada población, pero se han definido ciertas distribuciones "modelo" más comunes como la **Normal**,

binomial, Ji-cuadrado, "t" de Student, F de Fisher; a las cuales podemos aproximar estas distribuciones particulares.

3.1.- Características.-

En el siglo XVIII, los científicos observaron con sorpresa que los grados de distribución muestreal de varios estadísticos, tales como la media, seguían una distribución continua que denominaron **"curva normal de errores"**, y le atribuyeron reglas de la probabilidad.

La ecuación de densidad de probabilidad normal viene dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma})^2}$$

Para -∞ < x < ∞, y su representación gráfica (figura # 7) corresponde a la campana de Gauss.
Entre sus características tenemos:

- El área debajo de la curva entre 2 puntos dados representa la probabilidad de que ocurra un hecho entre esos dos puntos;
- Su dominio va de menos infinito a más infinito;
- Es simétrica con respecto a su media;
- Tiene dos colas y es asintótica al eje x por ambos lados;
- El valor del área debajo de toda la curva es igual a 1;
- El centro de la curva está representado por la media poblacional (μ).
- Para cualquier curva normal, el área de $-\sigma$ a $+\sigma$ es igual a 0.6827; de -2σ a $+2\sigma$ de 0,9545 y de -3σ a $+3\sigma$ de 0,9973;
- La distribución muestreal de varios estadísticos, tales como la media, tienen una distribución aproximadamente normal e independiente de la configuración de la población.

FIGURA # 7.- Curva normal (μ=0, σ=1)

Muchos aspectos naturales, como el peso de una especie bioacuática o la altura de personas de una población, son características que presentan una distribución normal.

3.2.- Distribución normal tipificada

Llamamos distribución normal tipificada a la distribución especial que representa a todas las variables aleatorias normales y que es la distribución de otra variable normal llamada ***Z***.
En donde ***Z*** va a ser igual a:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Y se la conoce como variable aleatoria estandarizada.

Esta función se caracteriza por tener media igual a cero (0) y desviación tipificada igual a uno (1).

La distribución tipificada se acostumbra a representar en forma acumulada. La tabla de la probabilidad acumulada para varios valores de ***Z*** permite encontrar la probabilidad de un intervalo dado a y b, tomando la diferencia entre probabilidades acumuladas de los valores de ***Z*** correspondientes sin tener que construir una distribución de probabilidad.

Para buscar la probabilidad de que ***Z*** sea mayor a x, buscamos en la tabla # 1, localizando primero la fila que corresponda al primer entero y su primer decimal, y luego buscamos la columna que corresponda al segundo decimal.

3.3.- Aplicaciones.

Parte de la importancia práctica de esta distribución teórica de probabilidad estriba en que muchos fenómenos biológicos presentan datos distribuidos de manera tan suficientemente Normal que su distribución es la base de gran parte de la teoria estadística uada por los biólogos.

Ya que muchos fenómenos naturales, así como ciertos estadísticos como la media, siguen una distribución Normal o aproximadamente normal, podemos hacer algunas suposiciones a partir de ella. Entre ellas tenemos:

- Estimaciones de intervalos de confianza para la media.
- Pruebas de hipótesis con respecto a medias.
- Aproximaciones a otras distribuciones de probabilidad.

CAPITULO IV

OTRAS DISTRIBUCIONES

Además de la distribución Normal estudiaremos otras distribuciones de probabilidad que nos serán de utilidad a lo largo del curso.

Estudiaremos La distribución Ji-cuadrado, "t" de Student y la "F" de Fisher - Schnedecor; además definiremos la distribución binomial.

Existen muchas otras distribuciones de probabilidad, tanto continuas como discretas, pero su estudio no entrará en este manual.

4.1.- Distribución "t" de Student.-

Desarrollada con base en distribuciones de frecuencia empíricas en 1908 por William Gosset, conocido por el sobrenombre de "Student". Un cervecero-estadístico que encontraba ciertas dificultadaes al usar la distribución Normal en muestras pequeñas. Esta mísma tabla ya había sido calculada matemáticamente en 1875 por un astrónomo alemán, el cual sin embargo no le había encontrado utilidad práctica.

El problema recide en que la distribución muestreal de la media se ajusta muy bien a la distribución Normal cuando se conoce σ. Si **n** es grande, esto no presenta ningún problema, aun cuando σ sea desconocida, por lo que en este caso es razonable sustituirla por ***s***. Sin embargo, en el caso de usar valores de **n** < 30, o sea en el caso de pequeñas muestras, esto no funciona tan bien.

Definiendo el estadístico ***t***:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

Se puede probar que siendox el promedio de una muestra tomada de una población normal con media μ y varianza σ^2, el estadístico ***t*** es el valor de una variable aleatoria con distribución "t" de student y parámetro ν (grados de libertad) = n-1.

Figura # 8.- Curva "t" de student.

Como puede apreciarse en la figura # 8 , la distribución "t" es muy similar a la distribución normal, y entre sus características tenemos:

- Tiene media igual 0, es asintótica al eje x y su dominio va de $-\infty$ a $+\infty$;
- El área bajo la curva desde $-\infty$ a $+\infty$ es igual a 1;
- Al igual que la distribución Normal estándar, esta distribución tiene media 0, pero su varianza depende del parámetro ν, denominado grados de libertad;
- La varianza de la distribución "t" excede a uno, pero se aproxima a ese número cuando $\nu \rightarrow \infty$; y,
- Al aumentar el valor de ν, la distribución "t" de student se aproxima a la distribución Normal, es

más, para tamaños muestreales de 30 ó más, la distribución Normal ofrece una excelente aproximación a la distribución "t".

Entre las aplicaciones de esta distribución tenemos la estimación de intervalos de confianza para medias a partir de muestras pequeñas y las pruebas de hipótesis basadas en muestras < 30.

En la tabla # 2 se encuentran los valores de t_α, a la derecha de los cuales se encuentra un (100 x α)% del área de la curva.

Para buscar el valor de t_α para ν = n-1 en la tabla, primero localizamos la columna del correspondiente valor de α y la fila correspondiente al valor de ν. La intersección de la fila y la columna nos dará el valor de t_α.

4.2.- Ji-cuadrado.-

La distribución Ji-cuadrado es una función de densidad de probabilidad que sigue aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = \nu /2$ y $\beta = 2$, y que representa la distribución muestreal de la varianza.

Definimos el estadístico Ji-cuadrado (χ^2) como:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Entre sus características tenemos:

Figura # 9.- Curva ji-cuadrado.

- Es asimétrica y asintótica al eje x por la derecha;
- Su dominio va de 0 a $+\infty$ (Figura # 8);
- El área bajo la curva desde 0 a $+\infty$ es igual a 1;
- Tiene parámetro $\nu = n-1$;
- Al incrementarse ν se aproxima a la distribución normal; y,

- Representa la distribución muestreal de la varianza.

Entre las aplicaciones de esta distribución tenemos la determinación de intervalos de confianza para varianzas, las pruebas de hipótesis para una varianza, el ajuste de datos a una distribución dada conocida y las pruebas de independencia.

En la tabla # 3 se dan algunos valores de χ^2 para varios valores de ν, donde χ^2 es tal que el área bajo la curva, a su derecha, es igual a α. En esta tabla, la columna del lado izquierdo contiene los valores de ν, el primer renglón consta de áreas α en la cola del lado derecho de la distribución Ji-cuadrada y la tabla propiamente dicha la constituyen los valores de χ^2.

4.3.- "F"de Fisher - Schnedecor.-

Otra distribución de probabilidad muy usada es la "F" de Fisher - Schnedecor, la cual está relacionada con la distribución beta, y representa la distribución muestreal de la razón de dos varianzas. Es decir que se obtiene de la razón de dos distribuciones Ji-cuadrado.

Definimos el estadístico F como:

$$F = \frac{s^2_1}{s^2_2}$$

El cual es el valor de una variable aleatoria que tiene distribución F con parámetros $\nu_1=n_1-1$ y $\nu_2=n_2-1$.

Su distribución gráfica la podemos apreciar en la figura # 10.

Figura # 10.- Curva F.

Entre sus propiedades tenemos:

- Es asimétrica, y asintótica al eje x por el lado derecho;
- Su dominio va de 0 a $+\infty$;
- El área bajo la curva desde 0 a $+\infty$ es igual a 1; y,
- Tiene parámetros $\nu_1=n_1-1$ y $\nu_2=n_2-1$.

La tabla # 4 contiene los valores de F de α = .01 y .05 para varias combinaciones de ν_1 y ν_2.

Entre las aplicaciones de esta distribución están las pruebas de hipótesis entre 2 varianzas y los análisis de varianza y covarianza.

4.4.- Distribución binomial.-

Muchos ensayos poseen solo dos resultados posibles, por ejemplo un animal sobrevive o no a cierto tratamiento, posee o no cierta característica. Estos fenómenos presentan generalmente una distribución de densidad asociada con la distribución **binomial.**

Entre las aplicaciones de la distribución binomial tenemos los intervalos de confianza para poporciones y las pruebas de hipótesis para proporciones.

CAPITULO V

BONDAD DE AJUSTE

5.1.- Generalidades

Para usar las diferentes distribuciones estudiadas, en nuestros problemas prácticos, debemos primero de asegurarnos que nuestros datos se aproximen a una de estas distribuciones dadas.

Hablamos de bondad de ajuste cuando tratamos de comparar una distribución de frecuencia observada con los correspondientes valores de una distribución esperada o teórica.

Estudiaremos la prueba ji-cuadrado para bondad de ajuste, la cual sirve tanto para distribuciones discretas como para distribuciones continuas.

También existe una prueba no paramétrica denominada de Kolmogoroff-Smirnov, la cual sólo sirve para distribuciones continuas, y no será estudiada por nosotros.

5.2.- Prueba Ji cuadrado

Para realizar esta prueba debemos de seguir los siguientes pasos:

- Ordenamos nuestros datos separándolos en k rangos o clases, cuidando de que en cada rango (i) la frecuencia observada (o_i) sea > 4;

- Contamos las frecuencias observadas en cada clase (o_i);

- Decidimos la distribución a la cual queremos ajustar nuestros datos, expresando la hipótesis nula y su alterna:

  H0 = Existe un buen ajuste.
  H1 = No existe un buen ajuste.

- Calculamos la frecuencia teórica esperada e_i para cada intervalo i, siendo ésta igual al producto del tamaño muestreal N por la probabilidad de dicho rango obtenida de la tabla correspondiente;

- Calculamos el estadístico χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

El cual sigue una distribución ji-cuadrada con $\nu = k - m - 1$ grados de libertad, en donde k es el número de intervalos y m es el número de parámetros estimados. Por ejemplo, para la distribución normal utilizaremos m=2 (media y varianza); y,

- Si el valor de χ^2 calculado es menor que el correspondiente valor de $\chi^2_{(\alpha)}$ de la tabla # 3, concluimos que existe un buen ajuste; de lo contrario, no.

$$W=\{\chi^2 > \chi^2_{\alpha}\}$$

CAPITULO VI

ESTIMACIÓN

6.1.- Puntual.-

En esencia, la estimación puntual se refiere a la elección de un estadístico calculado a partir de datos muestreales, respecto al cual tenemos alguna esperanza o seguridad de que esté "razonablemente cerca" del parámetro que ha de estimar.

Llamamos estimador insesgado a un estadístico cuyos valores promedios son iguales a los del parámetro que trata de estimar.

De dos estadísticos dados, θ_1 y θ_2, podemos decir que el más eficiente estimador de θ es aquel cuya varianza de distribución muestreal es menor.

Para poblaciones normales, el estimador más eficiente de μ es el promedio (x).

Sin embargo, debemos recordar que cuando empleamos una media muestreal para estimar la media de una población, la probabilidad de que la estimación sea en realidad igual a μ es prácticamente nula. Por esta razón es conveniente acompañar la estimación puntual de μ con una afirmación de cuán cerca podemos razonablemente esperar que se encuentre la estimación. Esto viene dado por:

$$E = Z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

para un porcentaje de confianza de 100 x 1-α y $n \geq 30$.

Para el caso de tener una muestra de tamaño menor que 30, pero pudiendo suponer razonablemente que estamos muestreando una población normal, E viene dado por la siguiente fórmula:

$$E = t_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

para un porcentaje de confianza de 100 × (1-α) y para ν = n-1 grados de libertad.

En lo que respecta a la varianza poblacional, el estimador insesgado más eficiente es la varianza muestreal:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{(n - 1)}$$

Y, para proporciones, el estimador insesgado mas eficiente del **parámetro** proporción poblacional (**p**) es el estadístico proporción muestral (**x/n**).

$$x / n = \frac{x}{n}$$

En donde **x** es el número de observaciones con un caracter determinado y **n** es el número total de observaciones (x + ¬x).

6.2.- Estimación por intervalos.-

Dado que no puede esperarse que las estimaciones puntuales realmente coincidan con las cantidades que intentan estimar, a veces es preferible reemplazarlas con estimaciones por intervalos, esto es, con intervalos en los cuales podemos esperar con un grado razonable de certeza que contengan al parámetro en cuestión.

6.2.1.- Estimas de medias por intervalos.-

Para poblaciones con distribución normal, conociendo la varianza poblacional σ, o en su defecto teniendo una muestra grande (n ≥ 30),el intervalo de confianza para μ viene dado por:

$$\bar{x} - Z_{(\alpha/2)} x \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{(\alpha/2)} x \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

con un nivel de confianza de 100 × (1-α)%.

Para muestras aleatorias pequeñas (n<30), tomadas de una población presumiblemente normal y de varianza desconocida, el intervalo de confianza para las medias vendrá dado por:

$$\bar{x} - t_{(\alpha/2)} x \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(\alpha/2)} x \frac{s}{\sqrt{n}}$$

con un nivel de confianza de 100 × (1-α)% y n-1 grados de libertad.

6.2.2.- De varianzas.-

El intervalo de confianza para la varianza en poblaciones normales viene dado por:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(\alpha/2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2)}}$$

con un nivel de confianza de 100 × (1-α)% y n-1 grados de libertad.

6.2.3.- De proporciones.-

Para proporciones, el intervalo de confiansa de la proporción poblacional **p** calculada a partir de la proporción muestral **x/n** vendrá dado por:

$$\frac{x}{n} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} < p < \frac{x}{n} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}$$

con un nivel de confianza de 100 × (1-α)% y n-1 grados de libertad.

6.3.- Gráfico de intervalos.-

Los intervalos de confianza pueden representarse gráficamente (Figura # 11), elaborando un gráfico de lineas para las medias, y representando en el mismo mediante barras los límites superior e inferior del intervalo de confianza.

FIGURA # 11.- Gráfico de intervalos confianza.

Este tipo de gráfico tiene la ventaja de permitir observar la precisión de nuestra estimación.

CAPITULO VII

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

7.1.- Generalidades.-

Llamamos hipótesis estadística a una asumción sobre una población que está siendo muestreada.

Un test de hipótesis es simplemente una regla mediante la cual esta hipótesis se acepta o se rechaza.
Esta regla está basada generalmente en un estadístico muestreal llamado estadístico de prueba, ya que se lo usa para probar la hipótesis.

La región crítica de un estadístico de prueba consiste en todos los valores del estadístico donde se hace la decisión de rechazar H0.

Debido a que las pruebas de hipótesis están basadas en estadísticos calculados a partir de *n* observaciones, la decisión tomada está sujeta a posibles errores.

Si rechazamos una hipótesis verdadera, estamos cometiendo un error del tipo I. La probabilidad de cometer un error del tipo I se llama α.

Si aceptamos una hipótesis falsa, estaremos cometiendo un error del tipo II, y la probabilidad de cometerlo se la denomina β.

Uno de los objetivos de las pruebas de hipótesis es diseñar tests en donde α y β sean pequeños.

Para probar una hipótesis, generalmente la expresamos en su forma nula (**H0**), y formulamos una hipótesis alterna (**H1**) que aceptaremos al rechazar la nula.

Ambas hipótesis deben ser distintas y mutuamente excluyentes.

Los pasos básicos para efectuar la mayoría de las pruebas de hipótesis son los siguientes:

1.- Expresar claramente la hipótesis nula (H0) y su alterna (H1);

2.- Especificar el nivel de significancia α y el tamaño de la muestra (n);

3.- Escoger un estadístico para probar H0, tomando en cuenta las asumciones y restricciones que involucran usar este estadístico;

4.- Determinar la distribución muestreal de este estadístico cuando H0 es verdadera;

5.- Designar la región crítica de la prueba, en la cual H0 va a ser rechazada en 100α% de las muestras cuando H0 es verdadera;

6.- Escoger una (dos) muestra(s) aleatoria(s)de tamaño n;

7.- Calcular el estadístico de prueba; y,

8.- Comparar el estadístico calculado con el teórico y decidir:

a) aceptar H0.

b) rechazar H0 (y aceptar H1).

c) no tomar ninguna decisión.

7.2.- Una población.-

Llamadas también pruebas unimuestrales. Aquí tratamos de probar la igualdad de un parámetro poblacional conocido θ con un parámetro poblacional calculado a partir de un estadístico θ_o.

Estudiaremos tres pruebas en este capítulo: una media con varianza conocida, una media con varianza desconocida y una varianza.

7.2.1.- Una media con varianza conocida.-

Utilizamos esta prueba para comparar una media poblacional conocida (μ) con la calculada a partir de el promedio de una muestra cuya varianza conocemos(μ_0); o, que en su defecto, su tamaño sea $\geq$ 30, por lo que supondremos que la varianza poblacional sea igual a la muestreal.

Las hipótesis a probar son:

H0 = $\mu_0 = \mu$

H1 = $\mu_0 \neq \mu$

El estadístico de prueba usado es:

donde Z sigue una ley normal tipificada (0,1).

La región crítica o de rechazo (W) viene dada por:

$$|Z| \geq Z_{(\alpha/2)}$$

Se pueden probar también estas hipótesis alternas con sus respectivas regiones de rechazo (W):

H0 = $\mu_0 = \mu$

H1 = $\mu_0 < \mu$ $\qquad W = \{Z \leq -Z_{(\alpha)}\}$

ó,

H0 = $\mu_0 = \mu$

H1 = $\mu_0 > \mu$ $\qquad W = \{Z \geq Z_{(\alpha)}\}$

7.2.2.- Una media con varianza desconocida.-

Utilizamos esta prueba para comparar una media poblacional conocida (μ) con la calculada a partir de el promedio de una muestra cuya varianza no conocemos (μ_0), y cuyo tamaño sea < 30. En este caso trabajaremos con la varianza muestreal en vez de la poblacional, pero usaremos el estadístico de prueba "t".

Las hipótesis a probar son:

H0 = $\mu_0 = \mu$

H1 = $\mu_0 \neq \mu$

El estadístico de prueba usado es:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

donde t sigue una ley "t" de student con n-1 grados de libertad.

La región crítica o de rechazo (W) viene dada por:

$$|t| \geq t_{(\alpha/2)}$$

Se puede probar también estas hipótesis alternas con sus respectivas regiones de rechazo (W):

H0 = $\mu_0 = \mu$

H1 = $\mu_0 < \mu$ $W = \{t < -t_{(\alpha)}\}$

ó,

Ho = $\mu_0 = \mu$

H1 = $\mu_0 > \mu$ $W = \{t \geq t_{\alpha}\}$

7.2.3.- Una varianza.-

Utilizamos esta prueba para comparar una varianza poblacional conocida (σ^2) con una calculada a partir de la varianza muestral de una población muestreada (σ^2_0), suponiendo con cierto grado de confianza que esté normalmente distribuida. En este caso trabajamos con el estadístico de prueba χ^2.

Las hipótesis a probar son:

Ho = $\sigma^2_0 = \sigma^2$

H1 = $\sigma^2_0 \neq \sigma^2$

El estadístico de prueba usado es:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

donde χ^2 sigue una ley Ji - cuadrado con $\nu = n-1$ grados de libertad.

La región crítica o de rechazo (W) viene dada por:

$$\chi^2_{(\alpha/2)} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha/2)}$$

Se puede probar también estas hipótesis alternas con sus respectivas regiones de rechazo (W):

Ho = $\sigma^2_0 = \sigma^2$

H1 = $\sigma^2_0 < \sigma^2$ W = $\{\chi^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha)}\}$

ó,

Ho = $\sigma^2_0 = \sigma^2$

H1 = $\sigma^2_0 > \sigma^2$ W = $\{\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}\}$

7.3.- Dos poblaciones independientes.-

Llamadas también pruebas bimuestreales, son usadas cuando queremos comparar dos estadísticos poblacionales calculados a partir de muestras de esas poblaciones.

En este capítulo estudiaremos cuatro casos: dos varianzas independientes, dos medias independientes con varianzas conocidas, dos medias independientes con varianzas desconocidas e iguales y dos medias independientes con varianzas desconocidas y desiguales.

7.3.1.- Dos Varianzas.-

Utilizamos esta prueba para comparar dos varianzas poblacionales (σ^2_1 y σ^2_2), calculadas a partir de las varianzas muestrales (s^2_1 y s^2_2) de poblaciónes muestreadas, suponiendo con cierto grado de confianza que estén normalmente distribuidas. Consideramos s^2_1 a la mayor de las dos.
En este caso trabajamos con el estadístico de prueba *F*.

Las hipótesis a probar son:

Ho = $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$

H1 = $\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$

El estadístico de prueba usado es:

$$F = \frac{s^2_1}{s^2_2}$$

donde F sigue una ley F de Fisher - Schnedecor con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad.

La región crítica o de rechazo (W) viene dada por:

$$F > F_{(\alpha/2)}$$

Se puede probar también esta hipótesis alterna con su respectiva región de rechazo (W):

Ho = $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$

H1 = $\sigma^2_1 > \sigma^2_2$ $\quad W = \{F \geq F_{(\alpha)}\}$

7.3.2.- Medias, varianzas conocidas.-

Utilizamos esta prueba para comparar dos medias poblacionales calculadas a partir del promedio de dos muestras cuyas varianzas conocemos, o en su defecto,cuyo tamaño individual sea ≥ 30, en donde supondremos que la varianza poblacional sea igual a la muestral.

Las hipótesis a probar son:

Ho = $\mu_1 = \mu_2$

H1 = $\mu_1 \neq \mu_2$

El estadístico de prueba usado es:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}}$$

donde *Z* sigue una ley normal tipificada (0,1).

La región crítica o de rechazo (W) viene dada por:

$$\_Z\_ \geq Z_{(\alpha/2)}$$

Se puede probar también esta hipótesis alterna con su respectiva región de rechazo (W):

Ho = $\mu_1 = \mu_2$

H1 = $\mu_1 > \mu_2$ $\qquad$ $W = \{Z \geq Z_{(\alpha)}\}$

7.3.3.- Medias, Varianzas desconocidas e iguales.-

Utilizamos esta prueba para comparar dos medias poblacionales calculadas a partir del promedio de dos muestras cuyas varianzas no conocemos, y cuyos tamaños sean < 30, siempre y cuando hayamos demostrado con anterioridad, mediante una prueba F, que las varianzas poblacionales de ambos son iguales.

En este caso trabajaremos con la varianza muestral en vez de la poblacional, pero usaremos el estadístico de prueba "t".

Las hipótesis a probar son:

Ho = $\mu_1 = \mu_2$

H1 = $\mu_1 \neq \mu_2$

El estadístico de prueba usado es:

$$t = \frac{\bar{x}1 - \bar{x}2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s^2_1 + (n_2 - 1)s^2_2}{n_1 + n_2 - 2} x(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

donde *t* sigue una ley "t" de student con n-1 grados de libertad.

La región crítica o de rechazo (W) viene dada por:

$$\_t\_ \geq t_{(\alpha/2)}$$

Se puede probar también esta hipótesis alterna con su respectiva región de rechazo (W):

Ho = $\mu_1 = \mu_2$

H1 = $\mu_1 > \mu_2$ $W = \{t \geq t_{(\alpha)}\}$

7.3.4.- Medias, varianzas desconocidas y desiguales.-

En el caso de que no se haya demostrado la igualdad de varianzas entre las poblaciones mediante una prueba F, no sería necesario realizar un test de medias, ya que las poblaciones son tan heterogéneas respecto a sus varianzas.

Si, a pesar de esto, se desea realizar una prueba de medias, (problema de Behrens - Fisher), se puede realizar de varias maneras, siendo una de ellas la prueba de Smith - Satterthwaite, usando el estadístico:

$$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

el cual sigue una ley "t" de student con grados de libertad igual a:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 + 1} - 2}$$

Las hipótesis y áreas críticas son las mismas usadas en la prueba "t" bimuestreal.

7.4.- Pruebas en muestras dependientes.-

Esta prueba se aplica a muestras de poblaciones dependientes la una de la otra, como en el caso de pruebas en una misma población antes y después de un tratamiento.

La lógica de la prueba se reduce a determinar las diferencias en los individuos de la muestra, y a probar si la media de estas diferencias son iguales a cero.

Las hipótesis a probar son:

Ho: $\mu_{\Delta} = 0$

H1: $\mu_{\Delta} \neq 0$

El estadístico de prueba a usar es:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

donde t sigue una ley "t" de student con $\nu = n-1$ grados de libertad;d es el promedio de las diferencias entre ambas muestras; sd es la desviación estandar muestral de las diferencias y n es el número de diferencias.

La región de rechazo (W) viene dada por:

$$|t| \geq t_{(\alpha/2)}$$

Otras formas de tratar muestras dependientes es mediante un diseño de bloques aleatorios o mediante un análisis de covarianza.

7.5.- Pruebas de proporciones.-

Se usan para comparar proporciones o porcentajes.

Existen dos casos. El primero es comparar una proporción poblacional conocida **p** con una calculada a partir de un estadístico $\mathbf{p_0}$, donde el producto np debe ser mayor o igual que cuatro.

Aquí las hipótesis a probar son:

Ho: $p_0 = p$

H1: $p_0 \neq p$

Y el estadístico de prueba usado es:

$$Z = \frac{p_o - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

el cual sigue una ley normal tipificada (0,1), p es la proporción conocida; q = 1- p y po es la proporción calculada a partir de la muestra.

El área crítica o de rechazo (W) viene dada por:

$$\_Z\_ > Z_{(\alpha/2)}$$

Se pueden probar también estas hipótesis alternas con sus respectivas regiones de rechazo (W):

Ho = $p_0 = p$

H1 = $p_0 < p$ $\quad W = \{Z < -Z_{(\alpha)}\}$

ó,

Ho = $p_0 = p$

H1 = $p_0 > p_0$ $\quad W = \{Z > Z_{(\alpha)}\}$

para el otro caso se tienen dos proporciones calculadas a partir de muestras. En este caso las hipótesis a probar son:

Ho = $p_1 = p_2$

H1 = $p_1 \neq p_2$

El estadístico de prueba usado es:

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

donde *Z* sigue una ley normal tipificada (0,1), y p es la proporción de ambas muestras juntas:

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

La región crítica o de rechazo (W) viene dada por:

$$\_Z\_ \geq Z_{(\alpha/2)}$$

Se puede probar también esta hipótesis alterna con su respectiva región de rechazo (W):

Ho = $p_1 = p_2$

H1 = $p_1 > p_2$ $\quad\quad W = \{Z \geq Z_{(\alpha)}\}$

7.6.- Pruebas de independencia.-

En el caso de que queramos determinar la dependencia o independencia de dos variables **x** y **y** entre si utilizamos la prueba ji-cuadrado para independencia.

Para realizar la misma seguimos los siguientes pasos:

- Enunciamos la hipótesis nula y su alterna:

  H0 : Los caracteres son independientes.

  H1 : Los caracteres son dependientes.

- Construimos una tabla de doble clasificación, dividiéndola en **s** filas y **r** columnas, en donde **r** es el número de modalidades del carácter **x** y **s** es el número de modalidades del carácter **y**, poniendo en cada casilla fila por columna (ij), el número de observaciones que poseen el carácter **x** con la modalidad **i** y el carácter **y** con la modalidad **j** (n_{ij}):

y x	1 ..	.. j ..	.. r	$(n_{i.})$ total
1 .	n_{11}	n_{1j}	n_{1r}	$(n_{1.})$ $\Sigma\ n_{1j}$
i .	n_{i1}	n_{ij}	n_{ir}	$(n_{i.})$ $\Sigma\ n_{ij}$
s	n_{s1}	n_{sj}	n_{sr}	$(n_{s.})$ $\Sigma\ n_{sj}$
$(n_{.j})$ total	$(n_{.1})$ $\Sigma\ n_{i1}$	$(n_{.j})$ $\Sigma\ n_{ij}$	$(n_{.r})$ $\Sigma\ n_{ir}$	N $\Sigma\Sigma\ n_{ij}$

- Calculamos los valores esperados (np_{ij}) para cada casillero fila por columna (ij), mediante la fórmula:

$$np_{ij} = \frac{n_{i.}\, x\, n_{.j}}{N}$$

- Calculamos el valor del estadístico χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\frac{(n_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}}$$

el cual sigue una ley ji-cuadrado con $\nu=(r-1)(s-1)$ grados de libertad.

- La región de rechazo viene dada por:

$$W = \{\chi^2 > \chi^2_{(\alpha)}\}$$

CAPITULO VIII

DISEÑO EXPERIMENTAL

8.1.- Generalidades.-

Llamamos investigación a la "búsqueda sistemática de la verdad no descubierta" (Leedy, 1974), poniendo especial atención a la palabra "sistemática".

Un experimento puede ser definido como "un estudio donde cierta(s) variable(s) independiente(s) es(son) manipulada(s), y su(s) efecto(s) en una o más variables independiente(s) determinado(s), siendo los niveles de esta(s) variable(s) independientes asignados al azar" (Hicks, 1982).

El experimento debe incluir una enunciación especifica del problema que se quiere solucionar, o sea que se debe describir exactamente lo que se quiere averiguar. No es bueno enunciar el problema en forma general, sino más bien en una forma en que todos los puntos queden claros y que nos muestren la forma en que la investigación debe ser llevada.

El enunciado del problema debe incluir la referencia a uno o más criterios (variables dependientes) usados para determinar el problema. Se debe determinar si estos criterios pueden ser medidos, con cuánta precisión y con qué medios.

El enunciado también debe definir los factores (variables independientes) que afectarán a estos criterios y si éstos van a ser mantenidos fijos o variados a ciertos niveles o al azar, el número de factores , el tipo y su disposición, y también si estos factores van a ser combinados y en qué forma, todo lo cual determinará el tipo de cálculo estadístico a realizar.

Los factores (variables independientes) básicamente pueden ser manejados así:

- Controlados rígidamente y mantenidos fijos a lo largo del experimento, con lo cual los resultados obtenidos son válidos solamente para estas condiciones fijas.

- Controlados a niveles fijos de interés.

- Aleatorios para promediar el efecto de variables que no pueden ser controladas.

Un principio básico es maximizar el efecto de la(s) variable(s) de interés, minimizar la varianza del error y controlar ciertas variables a niveles específicos.

El diseño del experimento involucra la cantidad de observaciones que se van a realizar, el orden en el cual se va a efectuar (que debería ser aleatorio para promediar las diferencias de ciertas variables que no podemos controlar, así como para poder asumir que los errores en medición son independientes), y tambien el orden de aleatoriedad a usar.

Al haber decidido esto se debe de mantener lo más apegado posible al plan trazado.

Debemos además estar al tanto de las restricciones del modelo que estamos usando y expresar el problema en forma de una hipótesis que podamos probar, y su hipótesis alterna.

Debe de tomarse en cuenta en el diseño de forma muy especial las restricciones de tipo logístico y financieras, ya que habrá que hacer un compromiso entre estas y lo óptimo en terminos matemáticos.

El análisis de datos es el último paso e incluye la realización mecánica de pasos ya decididos como son:

- Recolección y procesamiento de datos.

- Cálculo de ciertos estadísticos de prueba usados para hacer una decisión.

- La toma de la decisión en sí.

- La exposición de los resultados.

Los resultados deben ser expuestos de forma clara, precisa e intelegible, y los cálculos estadísticos pueden ser incluidos en los apéndices, sólo de ser necesario.

8.2.- Modelos de diseño.-

Existen innumerables modelos de diseño de experimentos, no siendo el propósito de este manual el abarcarlos todos; sin embargo se explicarán algunos modelos de diseños básicos, lo que facilitará la comprensión de otros diseños que se encuentren en otros libros más avanzados.

8.2.1.- Diseño de un factor, completamente aleatorio.-

Siempre que sólo se varíe un factor, ya sea cualitativo o cuantitativo, fijo o al azar, el experimento se considera **de un factor.**

Dentro de este factor existirán varios niveles o tratamientos, cuyo número lo designaremos como **k.** El objetivo del experimento es determinar si existen diferencias entre los efectos de los tratamientos.

Si el orden de experimentación aplicado a los distintos tratamientos es completamente aleatorio, de forma que se consideren aproximadamente homogéneas las condiciones en que se está trabajando, llamaremos a este **diseño completamente aleatorio.**

Cada tratamiento tendrá n_i observaciones, sin importar que el tamaño de las muestras no sea igual de un tratamiento a otro.

El modelo matemático vendrá dado por:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}$$

Lo que significa que cada $i^{\underline{ésima}}$ observación del $j^{\underline{ésimo}}$ tratamiento va a ser igual a la media poblacional (μ) más un efecto del $j^{\underline{ésimo}}$ tratamiento (τ_j) mas un error aleatorio para el mismo (ε_{ij}).

Este diseño se lo resuelve generalmente mediante un ANOVA de una vía con la hipótesis nula:

H0 : $\tau_j = 0$; para todos los j.

8.2.2.- Diseño de un factor, bloques aleatorios.-

En el caso de que no todas las observaciones que podamos realizar para los **n** tratamientos puedan considerarse homogéneas, y es más, podamos considerar que hay fuentes conocidas de variabilidad, nos podemos librar de esta variabilidad dividiendo las observaciones de cada clasificación en bloques.

En el caso de que en cada bloque haya una observación de cada tratamiento, y siempre y cuando los tratamientos sean asignados al azar dentro de cada bloque, denominamos a este **diseño en bloques aleatorios.**

El modelo matemático usado vendrá dado por:

$$Y_{ij} = \mu + \beta_j + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

en donde β_j es el efecto del $j^{\underline{ésimo}}$ bloque y τ_i es el efecto del $i^{\underline{ésimo}}$ tratamiento.

Este diseño se lo resuelve mediante un ANOVA de dos vías, en donde la hipótesis fundamental a probar es:

H0 : $\tau_i = 0$, para todos los tratamientos, pudiéndose también probar:

H0 : $\beta_j = 0$, para todos los bloques,

la cual, al rechazarse, nos indicará que el criterio de clasificación en bloques ha sido correcto.

8.2.3.- Cuadrado Latino.-

En el caso de que queramos eliminar dos fuentes de variación conocidas, en un experimento de un solo factor, utilizaremos el **diseño de cuadrado latino**, el cual es un diseño en el cual cada tratamiento aparece una y sólo una vez en cada fila (1ª fuente de variación), y una y sólo una vez en cada columna (2ª fuente de variación).

Debemos recordar que aunque trabajamos con dos restricciones a la aleatoriedad, seguimos trabajando con solo un factor.

Este diseño es posible únicamente cuando el tamaño de cada una de las restricciones es igual al número de tratamientos.

El tipo de ANOVA a usarse es el de tres vías.

En caso de tener tres restricciones a la aleatoriedad, estaremos frente a un diseño de **cuadrado greco-latino.**

8.2.4.- Experimentos Factoriales.-

Llamamos **experimento factorial** a aquel en el cual todos los niveles de un factor (variable independiente 1) son comparados con todos los niveles de otro(s) factor(es) (variable independiente 2(n)).

El modelo matemático usado vendrá dado por:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_{ij} + \rho_k + \varepsilon_{ij}$$

en donde τ_{ij} es el efecto del i$^{\underline{ésimo}}$ tratamiento del 1$^{\underline{er}}$ factor con el j$^{\underline{esimo}}$ tratamiento del 2$^{\underline{do}}$ factor y ρ_k el efecto de la k$^{\underline{esima}}$ repetición.

La diferencia de un experimento factorial con otro diseñado en bloques, es que en el diseño en bloques nos interesa solamente los efectos de **un factor** aunque lo separemos en bloques para **eliminar las interferencias de otro factor.** En un experimento factorial, en cambio, estamos interesados en **evaluar el efecto de estos dos o más factores**, así como sus posibles **interacciones.**

Una interacción ocurre cuando un cambio en un factor produce un distinto cambio en nuestra variable a un nivel de otro factor que a otro nivel de este otro factor.

Algunas de las ventajas de los diseños factoriales son:

- Es posible mayor eficiencia que con el diseño de experimentos de un factor.

- Todos los datos son usados para calcular todos los efectos.

- Se adquiere información sobre posibles interacciones entre los dos tratamientos.

8.3.- Determinación del tamaño muestreal.-

Uno de los principales factores que hay que considerar en nuestro diseño experimental es el del tamaño de la muestra.

En general, es recomendable tomar la muestra tan grande como sea posible; sin embargo, podemos calcular matemáticamente el número mínimo necesario con base en lo siguiente:

- La mínima diferencia que deseamos detectar (Δ).

- La variación existente en la población (σ).

- La máxima probabilidad de error que deseamos tomar (α y β).

Para estimaciones puntuales, nuestro tamaño muestral vendrá dado por:

$$n = [\frac{Z_{(\frac{\alpha}{2})}\sigma}{\Delta}]^2$$

Para pruebas de hipótesis tenemos la fórmula:

$$n = [\frac{(Z_{(\alpha)} + Z_{(\beta)})\sigma}{\Delta}]^2$$

para ensayos de una cola, y la misma usando $Z_{(\alpha/2)}$ y $Z_{(\beta/2)}$ para ensayos de dos colas.

A pesar de esto, los tamaños muestreales son generalmente escogidos de forma arbitraria, debido a limitaciones de orden económico y práctico.

8.4.- Datos atípicos.-

Llamamos datos atípicos a aquellos datos que debido a su lejanía de los otros datos de nuestra muestra, podemos considerarlos como no pertenecientes a la población, o como datos que desvían nuestra muestra del verdadero valor de la población.

Es importante tener un criterio objetivo matemático ya que considerar subjetivamente los mismos puede tener serias consecuencias.

Existen varios criterios para determinar que números son atípicos, generalmente en base del tamaño de la muestra y de su varianza. Nosotros estudiaremos el criterio de Chauvenet.

Este criterio considera atípicos a los datos que se alejan de la media más de 1/2n de lo que lo haría una población normal.

Calculamos para cada dato el estadístico:

$$\frac{|x_m - \bar{x}|}{s}$$

y, si el valor del mismo es mayor que el valor correspondiente en la tabla # 5, consideramos al dato atípico y lo eliminamos.

Hay que tener cuidado de no a realizar este procedimiento más de una vez en una muestra, porque corremos el riesgo de que al disminuir nuestra desviación estandar eliminemos datos que no sean atípicos.

Otros criterios para determinar datos atípicos son el test de Dixon y el de Grubb.

CAPITULO IX

ANÁLISIS DE VARIANZA

9.1.- Generalidades.-

Al estudiar las pruebas de hipótesis, veíamos que éstas se usaban para comparar una o dos poblaciones.

En el caso de querer comparar más de dos poblaciones usando pruebas bimuestreales, tendríamos que determinar las diferencias entre cada par posible. Esto, además de ser tedioso, aumentaría la posibilidad total de un error hasta niveles prohibitivos.

Sin embargo, tenemos el análisis de varianza (ANOVA), el cual no es otra cosa que una prueba de hipótesis para más de dos muestras, en donde tratamos de averiguar si las poblaciones que muestreamos son todas iguales en lo que respecta a sus medias, o si en su defecto, hay por lo menos una que sea distinta.

Así, las hipótesis básicas que aplicaremos en un ANOVA serán:

Ho : $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n$ (todas las medias son iguales)

H1 : $\exists \ \mu_i$ tal que $\mu \neq \mu_i$ (al menos hay una media desigual)

Sin embargo, existen ANOVAs que no sólo comparan tratamientos, sino bloques; e incluso hay los que comparan varios factores y su efecto conjunto, por lo que estas hipótesis básicas pueden ser complementadas con otras, dependiendo del caso.

9.2.- ANOVA de una vía.-

Utilizamos un ANOVA de una vía cuando queremos comparar las medias en un experimento diseñado por azar simple.

Las hipótesis a probar son:

Ho : $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n$ (todas las medias son iguales)

H1 : $\exists\ \mu_i$ tal que $\mu \neq \mu_i$ (al menos hay una media desigual)

Para facilidad en la realización de los cálculos, utilizaremos las sgtes tablas:

T R A T A M I E N T O S

1	2	.	.	.	j	.	.	.	k	TOTALES
Y_{11}	Y_{12}	.	.	.	Y_{1j}	.	.	.	Y_{1k}	
Y_{21}	Y_{22}	.	.	.	Y_{2j}	.	.	.	Y_{2k}	
.	.				.				.	
.	.				.				.	
Y_{i1}	Y_{i2}	.	.	.	Y_{ij}	.	.	.	Y_{ik}	
.	.				.				.	
.	Y_{n22}								.	
.					Y_{njj}				.	
.									.	
Y_{n11}									Y_{nkk}	
$\Sigma\ Y_{i1}$	$\Sigma\ Y_{i2}$	.	.	.	$\Sigma\ Y_{ij}$	.	.	.	$\Sigma\ Y_{ik}$	$\Sigma\Sigma\ Y_{ij}$
n_1	n_2	.	.	.	n_j	.	.	.	n_k	N
$\Sigma\ Y^2_{i1}$	$\Sigma\ Y^2_{i2}$	.	.	.	$\Sigma\ Y^2_{ij}$	.	.	.	$\Sigma\ Y^2_{ik}$	$\Sigma\Sigma\ Y^2_{ij}$

En donde **k** es el número de tratamientos; n_1, n_2, ... n_k, los tamaños de las muestras de cada uno de los k tratamientos; $\Sigma\Sigma\ Y_{ij}$, la suma de todas las muestras; N es el número total de muestras; y, $\Sigma\Sigma\ Y^2_{ij}$ la suma de los cuadrados de todas las muestras.

La siguiente es la tabla del ANOVA:

FUENTE	Gdos. de lbtad.	Suma de Cuadrados (SC)	Suma media de cuadrados	*F* calcul.
TRATAMIENTO	K - 1	$\sum (\Sigma Y_{ij})^2/n_j - (\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/N$	SCT/(K - 1)	SMCT/SMCE
ERROR	N - K	SC TOTAL - SCT	SCE / (N - K)	
TOTAL	N - 1	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij} - (\Sigma\Sigma Y_{ij})^2/N$		

En donde la relación **SMCT / SMCE** es nuestro estadístico de prueba llamado *F*, y que sigue una distribución "F" de Fisher - Schnedecor con ν_1 = K-1 y ν_2 = N-K grados de libertad.

La zona crítica o de rechazo (W) viene dada por:

$$F \geq F_{(\alpha)}$$

9.3.- ANOVA de dos vías.-

Utilizamos un ANOVA de dos vías cuando queremos comparar las medias de un experimento con dos criterios de clasificación como, por ejemplo, con un diseño por bloques aleatorios; es decir, cuando tenemos otra fuente de variación conocida, además de nuestro tratamiento.

De esta forma tomamos en cuenta el error que podría haber al considerar iguales a dos poblaciones con el mismo tratamiento, pero realizado en distintas condiciones.

Se lo puede utilizar también en bloques incompletos, pero este caso no será estudiado en este manual.

También lo podemos usar para probar muestras dependientes como, por ejemplo, las pruebas de antes y después.

Las hipótesis básicas a probar son:

Ho : $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n$ ($\forall$ μ de los trat. son iguales)

H1 : $\exists$ μ_i tal que $\mu \neq \mu_i$ ($\exists$ μ de los trat. desigual)

Es decir, probar los efectos de los tratamientos.

Pudiéndose también probar:

Ho' : $\mu_a = \mu_b = \ldots = \mu_k$ ($\forall\ \mu$ de los bloques son iguales)

H1' : $\exists\ \mu_j$ tal que $\mu \neq \mu_j$ ($\exists\ \mu$ de los bloques desigual)

O sea, probar los efectos de los bloques.

Las tablas usadas en este caso son las siguientes:

TRATAMIENTO

BLOQUES	A	B	.	.	.	i	.	.	.	n	Ti
1	Y_{A1}	Y_{B1}	.	.	.	Y_{i1}	.	.	.	Y_{n1}	$\Sigma^n Y_{i1}$
2	Y_{A2}	Y_{B1}	.	.	.	Y_{i2}	.	.	.	Y_{n2}	$\Sigma^n Y_{i2}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
j	Y_{Aj}	Y_{Bj}	.	.	.	Y_{ij}	.	.	.	Y_{nj}	$\Sigma^n Y_{ij}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
k	Y_{Ak}	Y_{Bk}	.	.	.	Y_{ik}	.	.	.	Y_{nk}	$\Sigma^n Y_{ik}$
T.j	$\Sigma^k Y_{Aj}$	$\Sigma^k Y_{Bj}$	.	.	.	$\Sigma^k Y_{ij}$	.	.	.	$\Sigma^k Y_{nj}$	$\Sigma\Sigma Y_{ij}$
T^2.j	$\Sigma^k Y^2_{Aj}$	$\Sigma^k Y^2_{Bj}$	.	.	.	$\Sigma^k Y^2_{ij}$	.	.	.	$\Sigma^k Y^2_{nj}$	$\Sigma\Sigma Y^2_{ij}$

En donde **n** es el número de tratamientos; **k** el número de bloques; y, **N** (n x k), el número total de observaciones.

$\Sigma\Sigma$ Y_{ij} es la suma de todas las N observaciones; y, $\Sigma\Sigma Y^2_{ij}$, la suma de todas estas N observaciones al cuadrado. $\Sigma^n Y_{ij}$ es la suma de los n tratamientos del bloque número **j** y $\Sigma^k Y_{ij}$ es la suma de los k bloques del tratamiento número **i.**

La tabla de ANOVA usada para los cálculos es la siguiente:

FUENTE	Gdos. de lbtad.	Suma de Cuadrados (SC)	Suma media de cuadrados (SMC)	*F* calcul.
TRATAMIENTO	n - 1	$\sum^{n} (\Sigma^{k} Y_{ij})^{2/k} - (\Sigma\Sigma Y_{ij})^{2}/N$	SCT/(K - 1)	SMCT/SMCE
BLOQUE	k - 1	$\sum^{k} (\Sigma^{n} Y_{ij})^{2/n} - (\Sigma\Sigma Y_{ij})^{2}/N$	SCB / (k-1)	SMCT/SMCE
ERROR	(n-1) (k-1)	SC TOTAL-SCT-SCB	SCE / (n-1)(k-1)	
TOTAL	(nk) - 1	$\Sigma\Sigma Y^{2}_{ij} - (\Sigma\Sigma Y_{ij})^{2}/N$		

En donde la relación **SMCT / SMCE** es nuestro estadístico de prueba *F* para diferencias entre tratamientos, y sigue una distribución "F" de Fisher - Schnedecor con ν_1 = (n-1) y ν_2 = (n-1)(k-1) grados de libertad.

La relación **SMCB / SMCE** es nuestro estadístico de prueba *F'* para diferencias entre bloques, el cual sigue una distribución "F" de Fisher - Schnedecor con ν_1 = (k-1) y ν_2= (n-1)(k-1) grados de libertad.

La región de rechazo para cualquiera de los dos estadísticos viene dada por:

$$F \geq F_{(\alpha)}$$

para los grados de libertad correspondientes.

9,4.- ANOVA multifactorial.-

Utilizamos un ANOVA multifactorial cuando queremos comparar los efectos de mas de 1 tratamiento, así como los efectos de las interacciones de esos tratamientos.
Es decir, cuando tenemos un diseño factorial.

En este capítulo veremos como se realiza un ANOVA de 2 factores.

Definiremos α como el efecto del factor # 1, β como el efecto del factor # 2, ρ como el efecto de las repeticiones y $(\alpha\beta)$ como el efecto de las interacciones de ambos factores.

Las hipótesis a probar son:

H0 : $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_a=0$ (todos los efectos del 1er factor son 0)

H1 : $\exists\ \alpha_i$ tal que $\alpha_i\neq 0$ (al menos 1 efecto del 1er factor no es 0)

Pudiendose probar también:

H0' : $\beta_1=\beta_2=...=\beta_b=0$ (todos los efectos del 2do factor son 0)

H1' : $\exists\ \beta_j$ tal que $\beta_j\neq 0$ (al menos 1 efecto del 2do factor no es 0)

y:

H0'' : $\rho_1=\rho_2=...=\rho_r=0$ (todos los efectos de las réplicas son 0)

H1'' : $\exists\ \rho_k$ tal que $\rho_k\neq 0$ (al menos 1 efecto de las réplicas no es 0)

asi como:

H0''' : Todos los $(\alpha\beta)_{ij}$ son iguales.

H1''' : Al menos un $(\alpha\beta)_{ij}$ no es igual.

La tabla de datos sigue el siguiente modelo:

FACTOR 1	FACTOR 2	REPLICA 1 ..	.. REPLICA k ..	.. REPLICA r	TOTAL
NIVEL 1	NIVEL 1	Y_{111}	Y_{112}	Y_{113}	$\Sigma^r Y_{11k}$
.	.				
.	.				
NIVEL 1	NIVEL j	Y_{1j1}	Y_{1jk}	Y_{1jr}	$\Sigma^r Y_{1jk}$
.	.				
.	.				
NIVEL 1	NIVEL b	Y_{1b1}	Y_{1bk}	Y_{1br}	$\Sigma^r Y_{1bk}$
.	.				
.	.				
NIVEL i	NIVEL j	Y_{ij1}	Y_{ijk}	Y_{ijr}	$\Sigma^r Y_{ijk}$
.	.				
.	.				
NIVEL a	NIVEL b	Y_{ab1}	Y_{abk}	Y_{abr}	$\Sigma^r Y_{abk}$
		$\Sigma^a\Sigma^b Y_{ij1}$	$\Sigma^a\Sigma^b Y_{ijk}$	$\Sigma^a\Sigma^b Y_{ijr}$	$\Sigma^a\Sigma^b\Sigma^r Y_{ijk}$

En donde **a** es el número de tratamientos o niveles del factor 1, **b** el número de niveles del factor 2, **n** es el número de tratamientos conjuntos a x b y **r** el número de réplicas o repeticiones.

El orden de un experimento factorial se denota como **a** x **b.**

Primero realizamos un anova de 2 vias, siguiendo la tabla de ANOVA:

FUENTE	Gdos. de lbtad.	Suma de Cuadrados (SC)	Suma media de cuadrados (SMC)	*F* calcul.
REPETICION	r - 1	$\sum^{r} (\Sigma^{n} Y_{ijk})^{2/n} - (\Sigma\Sigma Y_{ijk})^{2}/N$	SCR/(r - 1)	SMCR/SMCE
TRATAMIENTOS	ab - 1	$\sum^{n} (\Sigma^{r} Y_{ijk})^{2/r} - (\Sigma\Sigma Y_{ijk})^{2}/N$	SCT / (ab-1)	SMCT/SMCE
ERROR	(ab-1) (r-1)	SC TOTAL-SCT-SCR	SCE / (ab-1)(r-1)	
TOTAL	(abr) - 1	$\Sigma\Sigma Y^{2}_{ijk} - (\Sigma\Sigma Y_{ijk})^{2}/N$		

Luego de lo cual realizamos la subdivisión de la suma de cuadrados de los tratamientos en sus componentes **A, B** y **AxB :**

FACTOR 2

FACTOR 1	NIVEL 1..	.. NIVEL j..	..NIVEL b	TOTAL 2
NIVEL 1	$\Sigma^r Y_{11k}$	$\Sigma^r Y_{1jk}$	$\Sigma^r Y_{1bk}$	$\Sigma^b\Sigma^r Y_{1jk}$
.				
.				
.				
NIVEL i	$\Sigma^r Y_{i1k}$	$\Sigma^r Y_{ijk}$	$\Sigma^r Y_{ibk}$	$\Sigma^b\Sigma^r Y_{ijk}$
.				
.				
.				
NIVEL a	$\Sigma^r Y_{a1k}$	$\Sigma^r Y_{ajk}$	$\Sigma^r Y_{abk}$	$\Sigma^b\Sigma^r Y_{ajk}$
TOTAL 1	$\Sigma^a\Sigma^r Y_{i1k}$	$\Sigma^a\Sigma^r Y_{ijk}$	$\Sigma^a\Sigma^r Y_{ibk}$	$\Sigma^a\Sigma^b\Sigma^r Y_{ijk}$

Y aplicamos las formulas:

$$SSA = \frac{1}{br}\sum_{i=1}^{a}(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}Y_{ijk})^2 - (\sum\sum\sum Y_{ijk})^2$$

$$SSB = \frac{1}{ar}\sum_{j=1}^{b}(\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r}Y_{ijk})^2 - (\sum\sum\sum Y_{ijk})^2$$

Y

$$SC(AxB) = SCT - SCA - SCB$$

Luego de lo cual construimos la tabla final de ANOVA:

FUENTE	Gdos. de libertad	SC	SMC	*F* calculado
Repetición	r - 1	SCR	SCR/(r-1)	SMCR / SMCE
Tratamient.				
A	a - 1	SCA	SCA/(a-1)	SMCA / SMCE
B	b - 1	SCB	SCB/(b-1)	SMCB / SMCE
Interacción AxB	(a-1)(b-1)	SC(AxB)	SC(AxB)/ (a-1)(b-1)	SMC(AxB)/SMCE
Error	(ab-1)(r-1)	SCE	SCE/ (ab-1)(r-1)	
Total	abr - 1	SC Total		

En donde la relación **SMCR/SMCE** es nuestro estadístico de prueba *F* para diferencias entre réplicas, y sigue una distribución "F" de

Fisher - Schnedecor con ν_1 = r-1 y ν_2 = (ab-1)(r-1) grados de libertad.

La relación **SMCA/SMCE** es nuestro estadístico de prueba *F'* para diferencias debidas al tratamiento 1, y sigue una distribución "F" de Fisher - Schnedecor con ν_1 = a-1 y ν_2 = (ab-1)(r-1) grados de libertad.

La relación **SMCB/SMCE** es nuestro estadístico de prueba *F''* para diferencias debidas al tratamiento 2, y sigue una distribución "F" de Fisher - Schnedecor con ν_1 = b-1 y ν_2 = (ab-1)(r-1) grados de libertad.

Y, la relación **SMC(AxB)/SMCE** es nuestro estadístico de prueba *F'''* para diferencias debidas a la interacción de ambos tratamientos, y sigue una distribución "F" de Fisher - Schnedecor con ν_1 = (a-1)(b-1) y ν_2 = (ab-1)(r-1) grados de libertad.

La región de rechazo para cualquiera de los cuatro estadísticos viene dada por:

$$W = \{ \ F \geq F_{(\alpha)} \ \}$$

Para los grados de libertad correspondientes.

9.5.- Restricciones

Los análisis de varianza se basan en ciertas suposiciones que debemos de tomar en cuenta al realizarlos. Estas son:

- El proceso está bajo control y puede ser repetido.

- Todas las muestras deben ser aleatorias e independientes.

- Las poblaciones de las cuales muestreamos deben de seguir una ley Normal de distribución.

- Todas las poblaciones que estamos probando deben de tener varianzas iguales.

Algunos libros discuten estas suposiciones y qué se puede hacer si éstas no se cumplen.

Algunos estudios han demostrado que la falta de normalidad no afecta seriamente el análisis cuando el tamaño de la muestra es igual para todos los tratamientos.

En el caso de que la varianza y la media sean dependientes entre sí, existen tablas que indican cómo romper esta dependencia; sin embargo este caso no será estudiado por nosotros.

Para probar la igualdad de varianzas podemos usar varias pruebas. Una forma fácil de hacerlo es observar el rango de cada tratamiento. Se saca un rango promedior , el cual se lo multiplica por un factor D_4 extraído de la tabla # 6 para distintos tamaños de muestra. Si el productor D_4 es mayor que todos los rangos, se puede asumir con alguna seguridad que las varianzas son homogéneas.

Otras pruebas existentes son la prueba *C* de Cochran y la prueba *F* de Bartley - Box.

9.6.- Comparaciones múltiples.-

Después de realizar nuestro ANOVA, sabremos si todos nuestros tratamientos son iguales o si existe al menos uno que sea distinto; pero, usualmente queremos saber más: Cuál tratamiento es mejor y cuál es peor? Cuál tratamiento difiere de los otros y cuáles son iguales entre sí?

Existen muchas formas de responder estas preguntas, entre ellas tenemos las pruebas de los contrastes ortogonales, la prueba de Scheffé la prueba de Tukey, la prueba de rango múltiple de Duncan y la prueba de Student Newman Keuls o S-N-K. Aquí sólo estudiaremos estas dos últimas.

9.6.1.- Prueba Student- Newman-Keuls (SNK).-

Es recomendada para comparar factores cualitativos y para ser usada cuando la decisión de cuál comparación debe hacerse se la realiza **después** de que los datos han sido examinados. Las comparaciones se hacen mediante amplitudes múltiples basandose en los resultados.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1.- Ordene los k medias de menor a mayor.

2.- Determine el **MSCE** y sus grados de libertad de la tabla de ANOVA.

3.- Obtenga el error estándar de la media para cada tratamiento mediante la fórmula:

$$Sx_j = \sqrt{\frac{MSCE}{n_j}}$$

4.- Busque en la tabla # 7 de rangos studentizada los valores de los rangos

significativos (r_p) a un nivel α, con ν_2 grados de libertad de la tabla de ANOVA y
p = 2,3,..k, y apunte estos k-1 rangos.

5.- Multiplique estos rangos por Sx_j para lograr un grupo de k-1 rangos menos significativos.

6.- Pruebe todas las k(k-1)/2 posibles diferencias entre pares de medias con sus respectivos valores de rangos menos significativos.

Los valores de diferencias ≥ que el rango de mínima significancia indican diferencias significativas.

9.5.2.- Prueba de rango múltiple de Duncan.-

Es una prueba menos potente que la SNK y menos prudente.
Se diferencia de la SNK en que usa niveles de confianza variables en vez de fijos, dependiendo del número de medias.

El procedimiento general a seguir es el mismo, sin embargo usamos la tabla # 7.

CAPITULO X

AJUSTE DE CURVAS

Llamamos regresión a un problema en el cual fijamos valores dados de una variable independiente (x), y realizamos observaciones en una variable dependiente (y) de ésta.

El propósito de este estudio es lograr una ecuación para predecir **y** a partir de **x**, dentro de un rango específico.

En un análisis de correlación se mide, para cada muestra los valores de **x** y **y**; éstos son graficados para encontrar relaciones entre ellos. Además se calculan algunos estadísticos para determinar la fuerza de la relación, aunque un alto valor de correlación no indica necesariamente que x es causado por y, o viceversa.

Por lo tanto, la regresión puede ser usada para experimentos reales, mientras que la correlación se usa para estudios *ex post facto*, es decir, para analizar datos obtenidos con anterioridad.

Figura # 12.- Diagrama de dispersión.

10.1.- Diagrama de dispersión.-

Llamamos diagrama de dispersión a un gráfico (figura # 12) en el cual van a estar representados, mediante puntos, los valores de nuestros pares de variables (x,y).

Este diagrama sirve para darnos una idea visual del tipo de relación que existe entre ambas variables, y debe de ser hecho antes de iniciar cualquier cálculo para evitar trabajos innecesarios.

10.2.- Método de los mínimos cuadrados.-

Llamamos regresión lineal a un experimento donde tratamos de relacionar dos variables **x** y **y**, mediante una ecuación de la recta, esto es:

$$y = a + bx$$

en donde **a** es la intersección de la recta con el eje Y, y **b** es la pendiente de la recta.

Figura 13.- Recta de regresión por el método de los mínimos cuadrados.

Para encontrar los valores de **a** y **b** de la recta que más se acerca a nuestros datos experimentales, utilizamos el método de los mínimos cuadrados; es decir, vamos a tomar la recta para la cual los cuadrados de las diferencias entre los puntos experimentales (x,y) y los puntos calculados (x',y') sea mínima.

Las fórmulas para calcular los coeficientes **a** y **b** son:

$$b = \frac{\sum xy - \frac{\sum\sum x \sum\sum y}{N}}{\sum\sum x^2 - \frac{(\sum\sum x)^2}{N}}$$

$$a = \frac{\sum\sum y}{N} - b\frac{\sum\sum x}{N}$$

10.3.- Coeficientes de correlación.-

Llamamos coeficiente de determinación (r^2) a la proporción de la variación en la variable **y** que puede ser atribuida a una **regresión lineal** con respecto a la variable x. Se lo calcula mediante la fórmula:

$$r^2 = \left(\frac{N\sum xy - (\sum x \sum y)}{\sqrt{[N\sum x^2 - (\sum x)^2][N\sum y^2 - (\sum y)^2]}} \right)^2$$

Su raíz cuadrada positiva (r) se la conoce como coeficiente de correlación de Pearson y es un estimador del parámetro **coeficiente de correlación poblacional** ρ.

Llamamos **eta cuadrado (η^2)** a la relación entre la suma de cuadrados entre tratamientos (SCT) y la suma de cuadrados total (SC Total) del ANOVA, y representa a la máxima variación total que puede ser atribuida a **cualquier** regresión de **y** con respecto de **x**; o sea, la máxima correlación que podemos esperar en una curva o modelo matemático que pase por todas las **y** para cada valor de **x**.

10.4.- Uso de la regresión lineal para comparaciones de dos variables cuantitativas.-

Cuando estamos comparando datos de dos variables cuantitativas y nuestro ANOVA nos da diferencias muy significativas, podemos recurrir a la regresión lineal para determinar cómo responde nuestra variable dependiente **y** a las variaciones dentro de un rango de **x**.

El primer paso a seguir es calcular la ecuación lineal con sus constantes **a** y **b**.
Con base en esto elaboramos una tabla con los valores de **x**, y, **y'**(calculada a partir de la ecuación para cada valor de **x**),**Δy** (y - **y'**) y **(Δy)²**.

Con base en los datos de nuestra tabla de **x** y **y**, elaboramos nuestra nueva tabla de ANOVA:

FUENTE	Gdos. de lbtad.	Suma de Cuadrados (SC)	Suma media de cuadrados (SMC)	*F* calcul.
TRATAMIENTO	k - 1	$\sum(\frac{\sum Y_{ij}}{n_j})^2-(\frac{\sum\sum Y_{ij}}{N})^2$	SCT/(K-1)	SMCT/ SMCE

LINEAL	1	SCT - SCDL	SCL / 1	SMCL/ SMCE
DESV. DE LIN.	K-2	$\sum n_j (\Delta y)^2$	SCDL / (k - 2)	SMCDL /SMCE
ERROR	N - k	SC Total - SCT	SCE / N - k	
TOTAL	(nk) - 1	$\sum\sum Y^2_{ij} - \frac{(\sum\sum Y_{ij})^2}{N}$		

En donde las hipótesis a probar son:

Ho : No hay diferencias atribuibles a regresión lineal.

H1 : Sí hay diferencias atribuibles a regresión lineal.

Para el estadístico F = SMCL / SMCE con $\nu_1 = 1$ y ν_2 = N-k grados de libertad.

y:

Ho : No hay desviaciones de la regresión lineal calculada.

H1 : Si hay desviaciones de la regresión lineal calculada.

Para el estadístico F = SMCD / SMCE con ν_1 = k-2 y ν_2 = N-k grados de libertad.

10.5.- Regresiones no lineales .-

Además de la regresión lineal existen otros tipos de relaciones posibles entre las variables **x** y **y**. En los fenómenos naturales de crecimiento poblacional es muy común la regresión exponencial de la forma:

$$y = ab^x$$

en donde **a** es conocido como "índice de Falton", y **b** es el índice de crecimiento relativo.

Es característico de esta relación que, al graficarse sus pares de datos (x,y) en un papel semilogarítmico, el resultado sea una línea recta.

Podemos, de la misma forma, enderezar los datos numéricamente reemplazando esta ecuación por:

$$\log y = \log a + x \log b$$

Osea, linealizando la curva, después de lo cual tendremos un caso de regresión lineal.

Otro caso de regresión no lineal o curvilínea, ocurre cuando la relación entre ambas variables sigue una curva de grado 2 ó mayor, o sea que sigue una ecuación polinomial de la forma :

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p$$

El ajuste de curvas polinomiales también se utiliza para obtener aproximaciones mediante regresión, cuando nuestro modelo lineal no tiene suficiente fuerza. Pero, no estudiaremos este caso en nuestro manual.

10.6.- Pruebas de hipótesis respecto a no correlación.-

El objeto de esta prueba es determinar si existe o no correlación entre dos variables, esto es, si el coeficiente ρ es o no igual a 0, siempre y cuando sigan una distribución aproximadamente normal.

Las hipótesis a probar son:

H0 : $\rho = 0$ (No existe correlación entre las dos variables)

H1 : $\rho \neq 0$ (Si existe correlación entre las dos variables)

El estadístico de prueba **t** se lo calcula en base a r:

$$t = \frac{|r|}{\sqrt{1 - r^2}} x \sqrt{n - 2}$$

y sigue una distribución "t" de student con n-2 grados de libertad.

La región de rechazo viene dada por :

$$W = \{ t > t_{(\alpha/2)}$$

Para los grados de libertad correspondientes.

10.7.- Análisis de covarianza.-

Al estudiar el diseño de bloques aletorios, decíamos que podíamos librarnos del error experimental debido a variables identificables y controlables. Cuando estas variables concomitantes son identificables y mesurables; pero no controlables, estamos frente a un análisis de covarianza.
El método mediante el cual analizamos los datos es una combinación del método de regresión lineal y del ANOVA, cuyo modelo lineal va a estar dado por:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \delta x_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

En donde α_i es el efecto del i^{esimo} tratamiento, ε_{ij} el valor del error aleatorio, y δx_{ij} es la pendiente de la ecuación de regresión lineal.

La hipótesis a probar será:

H0 : $\alpha_1 = \alpha_2 = .. \alpha_k = 0$ (no hay efecto del tratamiento)

H1 : $\exists\ \alpha_i$ tal que $\alpha_i \neq 0$ (si hay efecto del tratamiento)

Los cálculos se realizan de la siguiente manera:

- Se calcula la suma de cuadrados del tratamiento, error y total del ANOVA de una via para las x.

- Se calcula la suma de cuadrados del tratamiento, error y total delANOVA de una via para las y.

- Se calcula la suma de productos del tratamiento, error y total mediante las siguientes fórmulas:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}}{kn}$$

$$SPTotal = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, y_{ij} - C$$

$$SPT = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)}{n} - C$$

$$SPE = SPTotal - SPT$$

- Se calcula la suma de cuadrados del tratamiento, error y total para las y ajustadas mediante las fórmulas:

$$S'CTotaly = SCTotaly - \frac{(SPTotal)^2}{SCTotalx}$$

$$S'CEy = SCEy - \frac{(SPE)^2}{SCEx}$$

$$S'CTy = S'CTotaly - S'CEy$$

Construimos seguidamente nuestra tabla de análisis de covarianza:

FUENTE	SCx	SCy	SP	SCy'	Grados de libertad	SMC
TRATAMIENTO	SCTx	SCTy	SPT	SCTy'	k - 1	SCTy'/(k-1)
ERROR	SCEx	SCEy	SPE	SCEy'	nk - k - 1	SCEy'/(nk-k-1)
TOTAL	SCTotx	SCToty	SPTot	SCToty'	nk - 2	

Nuestro estadístico de prueba *F* vendrá dado por la relación **SMCTy'/SMCEy'**, y sigue una distribución "F" de Fisher - Schnedecor con ν_1=k-1 y ν_2=nk-k-1 grados de libertad.

- Tablas estadísticas

1.- Función de distribución Normal $\boldsymbol{Z}_{(\alpha)}$

2.- Valores de t_α

3.- Valores de χ^2_α

4.- Valores de F_α

TABLA # 5

Valores de Chauvenet

n	x_m -x/s	n	x_m -x/s
2	1.15	14	2.10
3	1.38	16	2.15
4	1.53	18	2.20
5	1.64	20	2.24
6	1.73	25	2.33
7	1.80	30	2.39
8	1.86	40	2.50
9	1.91	50	2.58
10	1.96	60	2.64
11	2.00	80	2.74
12	2.04	100	2.81
13	2.07	1000	3.48

TABLA # 6

Rango de diferencias *D4*

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D4	3.267	2.575	2.282	2.155	2.004	1.924	1.864	1.816	1.770

7.- Percentiles de los rangos Studentizados.

8.- Valores críticos de *D* de Duncan

- Ejercicios varios aplicados a la Acuicultura.-

1.- En un muestreo de peso en una camaronera se obtuvieron los siguientes resultados (en gramos):

16	15	16	15	15	15	15	15	17	17	15
	16	16	17	16	16	16	16	15	16	16
	16	16	16	17	17	16	16	16	16	16
	16	18	18	18	19	18	19	18	18	18
	18	19	18	19	18	18	18	18	19	19
	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
	18	18	18	18	18	19	18	19	19	19
	19	18	18	18	19	19	18	18	19	19
	19	19	18	20	21	20	20	20	21	21
	21	22	22	21	21	22	21	20	22	22
	21	21	21	21	21	21	21	20	22	20
	21	20	20	20	21	21	21	21	22	22
	21	21	21	22	22	21	20	21	21	22
	22	22	22	22	22	21	21	26	24	24
	24	25	25	25	26	25	26	24	24	23
	25	26	24	24	24	25	25	25	26	24
	25	25	25	24	25	25	25	24	26	29
	28	28	29	27	28	29	28	28	28	27
	28									
28	28	27	28	27	28	29	30	28	29	29
	29	28	29	28	28	28	28	29	29	

Con base en estos datos:
a.- Construya una tabla de distribución de frecuencias.
b.- Grafique mediante un histograma la frecuenci relativa.
c.- Grafique mediante un gráfico de barras la frecuencia relativa.
d.- Grafique mediante un polígono de frecuencias la frecuencia relativa y la frecuencia acumulada relativa.
e.- Grafique mediante un gráfico de sectores la frecuencia relativa.
f.- Calcule el promedio.
g.- Calcule la mediana.
h.- Calcule la desviación estándar empírica.

i.- Calcule la varianza empírica.
j.- Calcule el rango.
k.- Construya una distribución de frecuencias usando los rangos comerciales (colas por libra).
l.- Realize los mismos gráficos que se hicieron para la otra distribución de frecuencias.
m.- Compare y comente la utilización del gráfico de barras y el histograma en ambos casos.

2.- Antes de cosechar una piscina de cultivo de camarón, tomamos una muestra de 230 animales la misma que pesa 3,956 gramos y cuya varianza es 3.78; al cosechar la misma obtenemos de la empacadora una liquidación de la cual calculamos un peso promedio de 16.83 y una varianza de 3.96. En estos datos, señale:

a.- El promedio.
b.- La media.
c.- La varianza empírica.
d.- La varianza poblacional.

3.- Calcule de cuantas maneras pueden suceder los siguientes eventos:

a.- Elegir dos peces de un tanque que contiene 25 peces.
b.- Elegir un pez y luego otro de un tanque conteniendo 25 peces.
c.- Contestar un examen de verdadero o falso que tenga 12 preguntas.
d.- Ordenar una cena de un menú que tenga 10 entradas, 6 sopas, 7 platos fuertes y 9 postres.
e.- Repartir una mano de cuarenta a una persona.
f.- Obtener "ronda" en una primera mano de cuarenta.

4.- Calcule la probabilidad de:

a.- Sacar una ronda en una primera mano de cuarenta
b.- Sacar dos caras en el lanzamiento de dos monedas.
c.- Sacar cara y sello en el lanzamiento de dos monedas.
d.- Sacar cara en la primera moneda y sello en la segunda moneda.

5.- Explique que entendería Ud. si un in forme metereológico dice "hay 50% de probabilidad de que llueva".

6.- En los dos ejercicios anteriores, calcule la probabilidad de no ocurrencia de los eventos descritos.

7.- Obtenga de la tabla de distribución Normal los valores de ***Z*** para los siguientes valores de α:

a.- 1.28
b.- 1.64
c.- 1.96

8.- Obtenga los valores de ***t*** para ν = 1, 3, 9 y 15 grados de libertad para los siguientes valores de α:

a.- .1
b.- .5
c.- .25
d.- .01
e.- .005

9.- Obtenga los valores de χ^2 para ν = 1, 3, 9 y 15 grados de libertad para los siguientes valores de α:

a.- .1
b.- .5
c.- .25
d.- .01
e.- .005

10.- Obtenga los valores de ***F*** con α = .5 y α = .1 para los siguientes grados de libertad:

a.- $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 5$
b.- $\nu_1 = 12$, $\nu_2 = 2$
c.- $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 3$
d.- $\nu_1 = 15$, $\nu_2 = 15$

11.- Determine si los valores del ejercicio # 1 siguen una ley Normal.

12.- Calcule el error (E) que podemos esperar con respecto a la media poblacional en el promedio del ejercicio # 1 con un 90% y un 95% de confianza.

13.- Calcule el intervalo de confianza para la media en el ejercicio # 1 con 90% y 95% de confianza.

14.- Con base en los siguientes datos de longitud total de postlarvas de *P. vannamei* (en mm.), calcule los intervalos de confianza para la media y para la varianza con un 95% de confianza:

7.5 7.2 7.1 6.9 7.2 8.0 7.5 7.4 6.8 7.8 7.7
7.2 7.2 7.4 7.6 6.9 7.9 7.8 7.6 7.5 7.4
6.9 7.0

15.- Con base en los siguientes datos de longitud total diarias de larvas de *P. vannammei*, construya un gráfico de las medias con sus respectivos intervalos de confianza:

DIA	LONGITUDES TOTALES (en micras)										
1	618	614	612	607	617	618	612	607	615	613	615
2	1,355	1,349	1,307	1,380	1,303	1,323	1,295	1,352	1,398	1,368	1,353
3	1,355	1,349	1,307	1,380	1,303	1,323	1,576	1,590	1,620	1,708	1,649
4	2,271	2,252	2,307	2,385	2,223	2,239	2,334	2,305	2,079	2,190	2,267
5	2,972	2,983	3,108	2,629	2,478	2,553	2,669	3,184	2,638	2,501	2,485
6	3,257	3,155	3,323	3,113	3,118	3,123	2,987	2,956	2,856	3,097	3,140
7	3,755	3,576	3,649	3,748	3,350	3,597	3,135	3,515	3,506	3,598	3,354
8	4,194	4,079	3,922	4,139	3,657	4,111	3,609	3,731	3,706	3,755	3,790
9	4,679	4,591	4,348	4,204	4,257	4,511	4,194	4,157	3,926	4,063	4,192
10	4,548	4,596	4,398	4,724	4,619	4,848	4,422	4,545	4,371	4,721	4,808
11	4,884	4,932	5,047	5,281	5,098	5,215	5,007	4,834	4,261	4,490	4,637
12	5,037	5,141	5,133	5,378	5,460	5,477	5,228	5,186	4,952	4,661	4,882
13	5,344	5,588	5,445	5,674	5,637	5,915	5,433	5,579	5,349	5,424	5,307
14	5,839	5,624	5,755	5,840	5,186	5,790	5,574	5,678	5,405	5,445	5,620
15	5,768	5,875	5,974	6,163	5,680	5,803	5,592	5,785	5,696	5,652	5,638
16	6,291	6,065	6,222	6,168	6,079	6,209	5,864	5,832	6,065	5,947	5,989
17	6,604	6,433	6,539	6,339	6,353	6,234	6,054	6,189	6,173	6,111	6,031
18	6,972	6,935	6,837	6,378	6,513	6,481	6,689	6,662	6,578	6,360	6,144

19	7,386	7,283	7,436	6,800	6,866	7,080	6,781	6,841	6,857	6,573	6,375
20	7,700	7,688	7,674	7,234	7,322	7,265	7,081	7,007	6,870	6,696	6,684

16.- En una muestra aleatoria de 100 camarones tomados de una piscina de cultivo se obtiene un peso promedio de 17.3 gramos con varianza = 3,7. Decida si existen diferencias significativas (α=0.5) entre esta piscina y el peso programado de cosecha = 18 gramos.

17.- Determine si la media de un embarque de alevines del cual tomamos una muestra de 15 alevines, y cuyas longitudes (en mm.) son:

10.3 11.3 11.4 11.3 10.6 10.8 10.2 10.6
10.8 11.2 10.2 10.4 10.6 10.5
10.9

es de menos de 11 mm. con una significancia del 95%.

18.- Determine en el ejemplo anterior si la varianza poblacional es de 0.19, α = 0.5.

19.- Determine si el embarque de alevines del ejercicio # 17 tiene la misma varianza (α =

0.5) que otro del cual tomamos la siguiente muestra:

10.6 10.8 10.2 11.4 11.5 11.3 10.5
10.7 10.7 10.2 11.4 10.2 10.9

20.- Se desea saber si el crecimiento semanal promedio de una camaronera en dos años consecutivos fué el mismo o si hubo diferencias significativas (α = 0.05) entre ellos. En el año 1, en 51 cultivos se obtuvo un crecimiento promedio de 0.98 con varianza 0.135; en el siguiente año el crecimiento en 47 cultivos fué de 0.92 con varianza 0.191. Realize los cálculos.

21.- Determine si hay diferencias significativas (α = 0.5) entre los embarques de los ejercicios #17 y 19.

22.- Se desea probar el efecto de polvillo de arroz en el crecimiento de *Chaetoceros gracilis*, para lo cual se realizan tres cultivos con este tratamiento y tres sin el.

Los siguientes son los datos de concentración final en los seis cultivos:

Con polvillo : 1'238,000 1'354,000
1'452,500

Sin polvillo : 1'154,000 1'430,500
1'338,500

Con una significancia del 95% demuestre si hay diferencias entre ambos tratamientos.

23.- Se desea determinar la eficiencia de cierto químico como bactericida en tanques de larvas, para lo cual se realizan los siguientes contajes de bacterias en el agua de 12 tanques antes y después de su aplicación:

ANTES	DESPUES
	8.400
15.200	9.300
	6.500
16.300	4.200
	3.100
10.100	12.300
	2.400
8.300	4.500
	9.400
6.400	4.200
	6.300
28.100	11.100
4.300	
6.800	
9.300	
11.400	
12.800	
34.000	

Determine si hay diferencias significativas ($\alpha = 0.01$) debidas al tratamiento.

24.- Cierta camaronera compra solamente semilla que tenga al menos un 60% de *P. vannamei*. Si un provedor trae un lote, el cual da como resultados del análisis 50%, 65%, 62% y 55% en 4 muestras; indique si se debería comprar esta larva.

25.- Se prueban dos tipos de dietas para larvas de camarón en 10 tanques, dando como resultado en la dieta A: 72.35%, 82.25%, 76.44%, 74,09%, 74.72% y 76.70% de sobrevivencia y en la B: 74.96%, 67.95%, 87.29% y 62.92%. Demuestre si existen diferencias significativas (α = 0.5) con respecto a sobrevivencia entre ambos alimentos.

26.- Determine si existen datos atípicos en los ejercicios # 17 y 19.

27.- Se obtienen los siguientes resultados de crecimiento semanal (en gramos) usando 4 distintos alimentos (A, B, C, D) en 19 piscinas de camarón:

A	B	C	D
0.74 0.76 0.75 0.74 0.75 0.76	0.68 0.71 0.71 0.72	0.75 0.77 0.77 O.76 0.75	0.72 0.74 0.73 0.73

Demuestre si existen diferencias significativas (α = 0.5) en crecimiento entre alimentaciones.

28.- Se prueban tres alimentos distintos (A, B y C) en cuatro camaroneras situados en diferentes zonas, dando como resultado los siguientes crecimientos:

Camaronera # 1: A= 0.86, B= 0.94, C= 1.12

Camaronera # 2: A= 0.54, B= 0.62, C= 0.71

Camaronera # 3: A= 0.71, C= 0.61, C= 0.78

Camaronera # 4: A= 0.94, C= 0.98, C= 0.99

Pruebe si existen diferencias significativas (α = 0.5) en crecimientos entre alimentos.

Use un ANOVA de dos vias y uno de una via y compare los resultados. Discuta las diferencias.

Pruebe la convenienciade usar el diseño en bloques demostrando las diferencias existentes en crecimiento entre camaroneras.

29.- Realize pruebas de rango múltiple de Duncan y SNK a los ejercicios anteriores.

30.- Los siguientes datos son relativos a los residuos de cloro en un tanque después de haber sido tratado con productos químicos:

Horas	ppm de Cl-
2	1.8

4	1.5
6	1.4
8	1.1
10	1.1
12	0.9

Ajuste una linea de mínimos cuadrados con la que podamos predecir los residuos de cloro en función de las horas después de haberse realizado el tratamiento.

BIBLIOGRAFIA

- Capa H. (1991). *Estadística Básica*. Cimacyt.

- Hicks C. (1982). *Fundamental concepts in the design of experiments*. CBS College Publishing.

- Leedy P. (1974). *Practical Research: Planning and design*. Macmillan.

- Miller I., Freund J. (1986). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Prentice - Hall.

- Möller F. (1979). *Manual of methods in aquatic enviroment research. Part 5.- Statistical tests.* FAO Fisheries technical paper No. 182.

- Steel R., Torrie J. (1985). *Bioestadistica: Principios yprocedimientos.* McGraw - Hill.