Se elige a_1 de modo que se maximice la varianza de y_1 sujeta a la restricción de que $a_1'a_1 = 1$

$$\mathrm{Var}(y_1) = \mathrm{Var}(a_1'x) = a_1' \Sigma a_1$$

El método habitual para maximizar una función de varias variables sujeta a restricciones el método de los multiplicadores de Lagrange. [3]
La complejidad se da al maximizar la función $'_1\Sigma \quad _1$ sujeta a la restricción $'_1\Sigma \quad _1 = 1$.
Se puede observar que la incógnita es precisamente a_1 (el vector desconocido que nos da la combinación lineal óptima).

Así, construyo la función L:

$$L(a_1) = a_1' \Sigma a_1 - \lambda(a_1'a_1 - 1)$$

derivando e igualando a 0, se tiene el máximo:

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 2\Sigma a_1 - 2\lambda\lambda I_1 = 0$$
$$(\Sigma - \lambda I)a_1 = 0$$

Lo antes expuesto no es más que un sistema de ecuaciones.

Para que el sistema tenga una solución distinta de 0, la matriz

$$(\Sigma - \lambda I)$$

tiene que ser singular, esto implica que el determinante debe ser igual a cero.

$$|\Sigma - \lambda I| = 0$$

y de este modo, λ es un autovalor de la matriz de covarianzas Σ es de orden p y si es definida positiva, tendrá p autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, tales que, se da $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p$.

Desarrollando la expresión anterior tenemos:

$$(\Sigma - \lambda I)a_1 = 0$$
$$\Sigma a_1 - \lambda I a_1 = 0$$
$$\Sigma a_1 = \lambda I a_1$$

entonces,

$$\mathrm{Var}(y_1) = \mathrm{Var}(a_1' x) = a_1' \Sigma a_1 = a_1' \lambda I a_1$$
$$= \lambda a_1' a_1 = \lambda .1 = \lambda$$

para maximizar la varianza de y_1 se tiene que tomar el mayor autovalor, digamos λ_1, y el correspondiente autovector a_1.

En realidad, a_1 es un vector que nos da la combinación de las variables originales que tienen mayor varianza, esto es si:

$$a_1' = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1p})$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
&y_1 = a_1'x = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\
&y_2 = a_2'x = a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\
&: \\
&: \\
&y_j = a_j'x = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jp}x_p
\end{aligned}
$$

Además, se quiere que y_2 no esté correlacionada con y_1, es decir la cov(y_2,y_1)=0.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(y_2, y_1) &= \mathrm{Cov}(a_2'x, a_1'x) \\
&= a_2'.E\left[(x-\mu)(x-\mu)'\right].a_1 \\
&= a_1' \sum a_1
\end{aligned}
$$

es decir, se requiere que $a_2' \sum a_1 = 0$, como se tenía que $\sum a_1 = \lambda a_1$, lo anterior es equivalente a:

$$a_2' \sum a_1 = a_2' \lambda a_1 = \lambda a_2' a_1 0$$

esto equivale a que $a_1' a_1 = 0$, es decir, que los vectores son ortogonales.

Posteriormente se procede a maximizar la varianza de y_2, como en el caso de y_1.

Los razonamientos anteriores se pueden extender, de modo que al j-ésimo componente le corresponde el j-ésimo autovalor.

Entonces todos los componentes "Y" se pueden expresar como el producto de una matriz formada por los autovectores, multiplicada por el vector "x" que contiene las variables $x_1,\ldots,x_p$.

$$y = Ax$$

donde,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

como,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(y_1) = \lambda_1 \\ &\mathrm{Var}(y_2) = \lambda_2 \\ &\ldots \\ &\mathrm{Var}(y_p) = \lambda_p \end{aligned}$$

la matriz de covarianzas de y es:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

porque $y_1, \ldots, y_p$ se han construido como variables incorreladas.

Se tiene que

$$\Delta = Var(Y) = A'Var(X)A = A'\sum A$$

o bien,

$$\sum = A\Delta A'$$

ya que A es una matriz , dado que $a_i'a_i = 1$ para todas las columnas, por lo que $A'A = I$.

El problema que plantea este estudio es la demora en la entrega de los productos, como se define en la sección 3.2., así mismo se define que el tiempo total de entrega de los productos como una variable denotada con la letra Y, la misma que está en función de las variables X´s, que se presenta en la sección 3.3.1., por lo que se tiene:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6$$

Una vez definido el análisis de componentes principales se realiza el análisis[1] de los datos de la muestra del año 2007, es importante indicar

[1] El cálculo de las Análisis de Componentes Principales se realiza por medio de el software estadístico Minitab versión 13

que los datos de las variables de estudio se encuentran a escalas diferentes, por lo tanto se procedió a estandarizarlos[2].

La estandarización significa que a cada dato observado se le resta la media estimada y se lo divide para la desviación estándar estimada de las variables.

Al aplicar el análisis de componentes principales a la matriz de datos estandarizados, se obtiene que con tres componentes principales se explica el 81.54% de la varianza total, como se explica en la tabla 4.10.

Tabla 4.12.
"Valores propios y porcentaje de explicación de cada componente"

Componentes	λ_i	Porcentaje de la Varianza Explicada	Porcentaje de la Varianza Acumulada
1	3,131	52,178	52,178
2	1,077	17,946	70,124
3	0,685	11,416	81,540
4	0,503	8,382	89,922
5	0,437	7,289	97,211
6	0,167	2,789	100,000

Fuente: Empresa de Químicos
Elaborado por: O. Franco, J. Hernández, A. Méndez

Como se observa en la tabla 4.13., en la primera componente principal predominan las variables en función del tiempo promedio de la revisión de la solicitud de compra, corrección de la solicitud de compra y

[2] Estandarización significa que a cada dato se le resta la media y se divide para la desviación estándar [5]

elaboración de la orden de compra; en la segunda componente principal la ponderación se inclina para que predomine la variable tiempo promedio de entrega del producto por parte del proveedor y en la tercera se hace presente la variable del tiempo promedio de aprobación de la orden de compra.

Tabla 4.13.
"Componentes Principales calculadas"

VARIABLES	**COMPONENTES**		
	1	2	3
Tiempo promedio de revisión de la Solicitud de Compra	0,799	-0,304	0,402
Tiempo promedio de corrección de la Solicitud de Compra	0,806	-0,246	0,138
Tiempo promedio de cotización de la Solicitud de Compra	0,783	0,212	-0,206
Tiempo promedio de elaboración de Orden de Compra	0,843	0,117	0,156
Tiempo promedio de aprobación de orden de compra	0,688	-0,037	-0,640
Tiempo promedio de la entrega del producto por parte del proveedor a la empresa	0,217	0,930	0,170

Fuente: Empresa de Químicos
Elaborado por: O. Franco, J. Hernández, A. Méndez

Las componentes principales se expresan de la siguiente manera:

$$Y_1 = 0.799x_1 + 0.806x_2 + 0.783x_3 + 0.843x_4 + 0.688_5 + 0.217x_6$$

$$Y_2 = - 0.304x_1 - 0.246x_2 + 0.212x_3 + 0.117x_4 - 0.037x_5 + 0.930x_6$$

$$Y_3 = 0{,}402x_1 + 0.138x_2 - 0.206x_3 + 0.156_4 - 0.640x_5 + 0.170x_6$$

Del análisis realizado el primer componente principal abarca el 52% de la varianza total de los datos y en ella se puede observar que las variables que tienen mayor ponderación en esta componente son:

x_1 : Tiempo promedio de revisión de la Solicitud de Compra

x_2 : Tiempo promedio de corrección de la Solicitud de Compra

x_4 : Tiempo promedio de elaboración de Orden de Compra

Por lo tanto, el esfuerzo de implementar acciones de mejora va a estar enfocado en las variables antes mencionadas, para así poder disminuir la variabilidad total de los datos del proceso.