

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**



**Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas**

**TEMA**

Análisis y comparación de modelos de programación matemática para la sincronización de señales de tránsito: Estudio sobre una arteria principal y una sección de la red de transporte en Guayaquil

**TESIS DE GRADO**

Previo a la obtención del Título de:  
Magister en Investigación Matemática

**Presentado por**  
José Xavier Cabezas García

Guayaquil-Ecuador  
2015

# Dedicatoria

A Guayaquil, la ciudad más hermosa de Ecuador y del mundo.

# Agradecimientos

A Dios,  
a mi esposa e hijos por sacrificarse conmigo,  
a mis padres por su apoyo incondicional,  
al Dr. Francisco Vera, profesor y compañero,  
al MSc. Erwin Delgado por su gran ayuda.

# Declaración Expresa

La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Posgrado, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la FCNM (Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas) de la ESPOL (Escuela Superior Politécnica Del Litoral).

José Xavier Cabezas García

## TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

---

Fernando Sandoya Ph.D.  
PRESIDENTE DEL  
TRIBUNAL

---

Francisco Vera A. Ph.D.  
DIRECTOR DE TESIS

---

John Ramírez F. MSc.  
VOCAL

# Índice general

<b>1. El problema de sincronización de Semáforos.</b>	<b>10</b>
1.1. Introducción y estado del arte. . . . .	10
1.2. Notación para el problema de sincronización. . . . .	12
1.3. Definiciones básicas de teoría de grafos. . . . .	13
<b>2. Enfoques de Solución y Modelos Matemáticos.</b>	<b>15</b>
2.1. Un primer método de solución. Caso arterial. . . . .	15
2.1.1. Notación adicional. . . . .	15
2.1.2. Teoría del primer método para una arteria. . . . .	16
2.1.3. Procedimientos para el algoritmo de 1964. . . . .	19
2.2. Modelos lineales para sincronización. . . . .	24
2.2.1. Modelos lineales para el caso arterial. . . . .	24
2.2.2. Calculando la sincronización. . . . .	30
<b>3. Sincronización sobre una red.</b>	<b>31</b>
3.1. Ciclos en el PSS. . . . .	31
3.2. Espacio de Ciclos. Base y Dimensión. . . . .	32
3.3. La restricción de ciclos. . . . .	35
<b>4. Aplicación y ejemplos numéricos.</b>	<b>37</b>
4.1. Una aplicación para el caso arterial. . . . .	37
4.2. Una aplicación para el caso sobre una red. . . . .	41
<b>5. Conclusiones y Recomendaciones.</b>	<b>44</b>
5.1. Conclusiones. . . . .	44
5.2. Recomendaciones. . . . .	45
<b>A. Ejemplos para el caso arterial.</b>	<b>48</b>
<b>B. Modelo lineal. Caso sobre una red.</b>	<b>51</b>

# Índice de figuras

1.1. Geometría para la sincronización. . . . .	13
2.1. Diagrama Distancia-Tiempo. . . . .	16
2.2. Geometría para dos señales en el grupo 1. . . . .	17
2.3. Geometría para dos señales en diferentes grupos. . . . .	17
2.4. Geometría para el procedimiento. . . . .	19
2.5. Procedimiento SEB. . . . .	20
2.6. Geometría para el Procedimiento de Movimiento. . . . .	21
2.7. Procedimiento SUB. . . . .	23
2.8. Esquemas de giro a la izquierda. . . . .	26
2.9. Una intersección de dos calles y un esquema de giro a la izquierda. . . . .	26
3.1. Arteria y ciclos en un grid graph de $2 \times 3$ . . . . .	32
3.2. Ejemplo de dos funciones en $\mathcal{E}(G)$ . . . . .	33
3.3. Dos árboles generadores y sus ciclos fundamentales. . . . .	34
3.4. Geometría para la sincronización de un ciclo. . . . .	36
4.1. Un Sector de la Avenida Juan Tanca Marengo. Guayaquil-Ecuador. . . . .	37
4.2. Límites de Velocidad en Guayaquil. . . . .	38
4.3. Sincronización. Caso Arterial. Ejemplo 1. $P = \overline{P}$ . . . . .	39
4.4. Sincronización. Caso Arterial. Ejemplo 2. $P = \overline{P}$ . . . . .	40
4.5. Sincronización. Caso Arterial. Ejemplo 3. $P \neq \overline{P}$ . . . . .	40
4.6. Sincronización. Caso Arterial. Ejemplo 4. $P \neq \overline{P}$ . . . . .	41
4.7. Un Sector del centro de Guayaquil. . . . .	42
A.1. Sincronización de semáforos. Avenida en Cleveland. $P = \overline{P}$ . . . . .	48
A.2. Sincronización de semáforos. Avenida en Cleveland. $P \neq \overline{P}$ . . . . .	49
A.3. Sincronización de semáforos. Avenida en Cleveland. $P \neq \overline{P}$ y diferentes velocidades. . . . .	50

# Índice de tablas

2.1. Expresiones para los valores de $\Delta_i$ . . . . .	27
4.1. Datos de entrada. Av. Juan Tanca Marengo. . . . .	38
4.2. Cotas inferiores y superiores para límites de velocidad. . . . .	42
4.3. Resultados. Bandwidths y velocidades . . . . .	43



## Resumen

Guayaquil, cantón de la Provincia del Guayas, está ubicado en la parte noroeste de América del Sur, en la región costera de la República del Ecuador. Su ubicación geográfica, clima, entre otros factores, han contribuido para que en él se concentren gran cantidad de fábricas, industrias y empresas. Es reconocida como un centro de negocios y es desde hace algún tiempo el cantón con mayor densidad poblacional, con un aproximado de 2'350.915 habitantes [16].

Podría deducirse del hecho de ser la ciudad con mayor número de habitantes, que la cantidad de personas que circulan por las vías de esta urbe porteña utilizando sistemas de transporte público o privado, podrían experimentar problemas de flujo de tránsito. De hecho, el Gobierno Municipal del cantón posee una dependencia encargada de establecer los sectores y horas sensibles al tráfico vehicular, rutas alternativas que coadyuven minimizar las consecuencias de las horas pico, cálculos aproximados de tiempos de viaje entre sectores, así como sincronización de los semáforos y demás señales de tránsito.

Las propuestas que son puestas en práctica para solucionar los problemas de tráfico deberían tener una base técnica y científica que las soporte. Esto no es algo nuevo o no aplicado, sin embargo, es posible siempre ajustar los modelos clásicos de transporte a situaciones particulares que respeten las características particulares de la zona en estudio como situación geográfica, horarios, tipo de vías, medios de transporte utilizados, etc. Justamente, este trabajo de titulación busca una justificación en la aplicación de modelos matemáticos que permitan colaborar de alguna forma al ordenamiento del tráfico en Guayaquil.

Los resultados de este estudio y revisión de la literatura siguen el siguiente esquema:

En el capítulo 1 se da una revisión del estado del arte de la sincronización de semáforos y se define el problema a resolver y sus variantes. El recorrido comienza en el año 1964 hasta nuestros días. Se presenta también la notación general utilizada por los modelos estudiados, estandarizando en la medida de lo posible la nomenclatura. También se da un breve resumen de definiciones básica de teoría de grafos que serán útiles en especial en el capítulo 3.

El capítulo 2 es un detallado análisis del trabajo original de Little [2] del año 1964, donde se da una mirada a las definiciones más clásicas y teoremas que son utilizados en los modelos lineales que se analizan también aquí. Ambos enfoques de solución, son para el caso de sincronización sobre una arteria.

En el capítulo 3, se completan los modelos lineales de la segunda parte del capítulo 2 con el análisis del caso sobre una red de transporte. Se define y demuestra cuantas restricciones adicionales son necesarias aumentar para este caso.

Las aplicaciones sobre una arteria principal y sobre pequeña red de la ciudad de Guayaquil utilizando el algoritmo y los modelos lineales del capítulo 2, se estudian en el capítulo 4. Se muestran resultados computacionales.

# Capítulo 1

## El problema de sincronización de Semáforos.

En este capítulo se da una introducción al problema de sincronización de semáforos, así como una breve revisión del estado del arte del problema desde trabajos clásicos hasta enfoques más modernos, para su implementación en casos reales.

### 1.1. Introducción y estado del arte.

Quienes poseemos un vehículo sabemos que uno de los enemigos del tiempo son los semáforos. Tratar de evitar una luz roja es casi una prioridad cuando se trata de llegar a tiempo, y seguramente más de una vez nos hemos preguntado del porqué de nuestra mala suerte cuando transitamos en las calles y avenidas de la ciudad. La optimización de los momentos en que un semáforo debe cambiar de verde a rojo puede mejorar esos retrasos producidos por parar demasiado en una intersección. Sin embargo, dejando a un lado los problemas personales, también hay muchas razones por las que una eficiente temporización de los semáforos podría beneficiar globalmente a la sociedad, entre ellas:

- Minimizar la contaminación, debido al efecto de la generación de gases tóxicos por los cambios de velocidad de los vehículos al momento de parar y luego seguir,
- Mejorar el movimiento del flujo vehicular, lo que reduciría los estancamientos de tráfico debido a colas generadas en las luces rojas, y
- Evitar accidentes de tránsito.

Estos problemas a mejorar son observables en pequeñas y grandes ciudades, como en Guayaquil-Ecuador que con 2'350.915 habitantes [16] posee un parque automotor de más de 600.000 vehículos. Resolver los problemas de tránsito aquí, se vuelve una prioridad, más aún cuando se sabe que la transportación consume el 27 % de la energía total y casi el 100 % de la energía utilizada globalmente proviene de recursos petroleros y de sus derivados, como la gasolina, ver [18].

El problema en el que se enfoca este estudio es conocido como **PSS**, Problema de Sincronización de Semáforos, o como **STLP** por sus siglas en inglés, Synchronization of Traffic Lights Problem. Muchos autores han dado varios enfoques de solución, pero a nuestro entender el más estudiado es aquel que trata de maximizar el tiempo que un vehículo o grupo de vehículos puede

cruzar una arteria sobre una red de transporte sin parar debido a la espera de una luz verde donde un semáforo este establecido.

Uno de los primeros trabajos en esta área y que inicia un estudio formal y matemático del problema fue el realizado por Morgan y Little [2] en el año 1964. Este trabajo muestra un método sistemático basado en la geometría de los tiempos para las luces rojas y verdes a lo largo de una arteria. El procedimiento se aplica sobre una arteria de dos vías, ya que el caso de una vía es simple como se verá luego. Cuando una calle tiene dos sentidos el proceso de sincronización es combinatorio y por lo tanto muy difícil de resolver, sin embargo el algoritmo presentado por Morgan y Little lo maneja bastante bien, dentro de lo supuesto que el enfoque original presentó, como por ejemplo, velocidades fijas de los vehículos al transitar de una esquina a otra. Esta última restricción fue relajada en modelos posteriores. Aunque antes de este artículo, hubieron otros enfoques geométricos de solución, éste mejoró los resultados previos considerablemente.

La solución presentada en [2] supone que cada semáforo sobre una arteria funciona dentro de un periodo común (ciclo <sup>1</sup>), el cual es la suma de los tiempos de rojo y verde, es decir, Si  $r_i$  y  $g_i$  son los tiempos de rojo y verde respectivamente, entonces  $r_i + g_i = r_j + g_j$  para todo semáforo  $i$  y  $j$ . El largo del periodo es medido en segundos y representa la unidad de tiempo para los cálculos del tiempo (Este supuesto es utilizado en casi todos los enfoques hasta el día de hoy). Con la ayuda de la siguiente definición se establecen los casos que se trataron en este trabajo:

**Definición 1** (Bandwidth [2]). *Considere una arteria sobre una red de transporte con una sucesión de semáforos ubicados sobre sus esquinas. El bandwidth (ancho de banda) a lo largo de la arteria es la porción del periodo durante el cual un vehículo podría comenzar en un esquina, y por medio de viajar a una preasignada velocidad, ir a otra sin parar por una luz roja.*

Los dos casos que se resolvieron en 1964 fueron:

- **Problema 1.** Dado un arbitrario número de semáforos a lo largo de una calle, un periodo común, los tiempos de rojo y verde para cada semáforo, y velocidades fijas en cada dirección de una arteria de dos vías entre cada par de adyacentes semáforos, sincronizarlos para producir bandwidths que son iguales en cada dirección y tan grandes como sea posible.
- **Problema 2.** Resincronizar los semáforos a favor de una dirección (si es factible) y darle a la otra dirección un bandwidth tan grande como sea posible.

Ya para el año 1966, John D.C. Little [3] uno de los autores del artículo del año 64, propone resolver los problemas 1 y 2 utilizando programación lineal entera (PLE), que en esa época ya era popular a pesar de las dificultades de trabajar con variables discretas en esa época (y aún lo es) y que el mismo autor menciona en su trabajo. La formulación es simple y utiliza mucha de la notación de [2], pero muestra también un pequeño gran aporte a la sincronización de semáforos ya no solo sobre una arteria, sino sobre una red, es decir múltiples arterias que se conectan unas con otras, formando una típica configuración de una red de transporte en una ciudad. Estos modelos fueron resueltos utilizando un algoritmo de ramificación y corte, especialmente diseñado para estos modelos. La introducción de este último caso, trajo consigo un problema adicional, el considerar ciclos sobre el grafo que representa la red, lo que lo hace mucho más difícil de tratar porque implica utilizar variables enteras adicionales en su formulación.

---

<sup>1</sup>Aunque el periodo se llamará ciclo, este concepto no debe confundirse con la definición de ciclo sobre un grafo. Aquí ciclo hace referencia al largo del periodo.

Gartner et al. [4] introdujeron un nuevo enfoque para el PSS, ellos no trataron de maximizar el bandwidth, sino más bien tiene como objetivo minimizar una función de desempeño de la red, en particular el atraso que los vehículos incurren debido a parar por luces rojas. La función objetivo construida es de hecho no lineal, pero es convexa, y los autores proponen linealizarla por partes, esto agrega nuevas restricciones al modelo.

En 1981 Little, Kelson and Gartner propusieron un sistema computacional llamado **MAX-BAND** [5] el cual resuelve los problemas 1 y dos, así como también el caso sobre una red, vía PLE. Las primeras versiones tratan el caso de red de transporte para aquellas cuyos ciclos son formados por solo tres nodos. Los casos más generales fueron introducidas en versiones posteriores. Aquí se analiza una importante variación en el modelo, la inclusión de diferentes esquemas de giros a la izquierda en cada esquina. En años posteriores Gartner propuso además considerar bandwidths variables en cada arco sobre cada arteria, lo que mejoró los valores de las funciones objetivos para casos previamente estudiados.

El enfoque de Gartner [4] fue utilizado también por Wunsch [6] en el año 2008, quien presenta un modelo lineal similar con la adición con unas pequeñas variaciones, sin embargo su principal aporte fue el demostrar formalmente la NP-completitud del problema de sincronización.

Trabajos más recientes incluyen enfoques heurísticos, ver Gartner y Stamatiadis [17] y modelos que agregan nuevos objetivos de interés global, como por ejemplo el ahorro de energía producida por la congestión vehicular, ver [18] del año 2014.

## 1.2. Notación para el problema de sincronización.

La mayor parte de la notación utilizada en este trabajo se basa en la geometría de la figura 1.1 y es inspirada por similares presentadas en los artículos de Little [2], [3] y Gartner [5].

En capítulos posteriores se utilizará nueva notación que será definida dentro del mismo con el fin de considerar pequeños cambios que se producen al revisar los diferentes modelos de los distintos artículos a través de los años. Y aunque esta sección trata de estandarizar de forma coherente las variaciones en la representación de variables y parámetros, no siempre es posible conseguirlo en su totalidad.

$n$ : Número de semáforos sobre una arteria de dos vías.

$S_i$ : Semáforo  $i$  con el subíndice incrementándose en la dirección de ida.

$C$ : Largo del periodo, (segundos).

$r_i$ : Tiempo de luz roja del semáforo  $S_i$ , (ciclos).

$b(\bar{b})$ : Bandwidth de ida (venida), (ciclos).

$t(h, i)$  ( $\bar{t}(h, i)$ ): Tiempo de viaje desde  $S_h$  a  $S_i$  en la dirección de ida (Tiempo de viaje desde  $S_i$  a  $S_h$  en la dirección de venida).

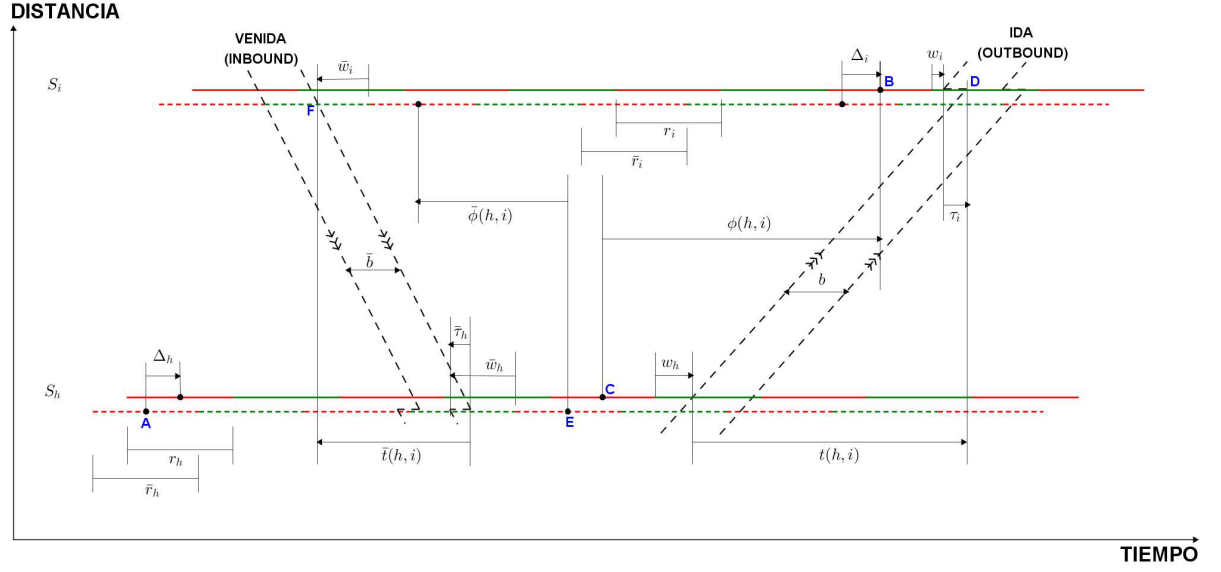


Figura 1.1: Geometría. Bandas de tiempos verdes de **ida** (OUTBOUND) y **venida** (INBOUND) que pasan a través de las señales  $S_h$  y  $S_i$ . Las barras sobre las cantidades se refieren a la dirección de venida. Los tiempos rojos de ida son dibujados con líneas sólidas rojas y los de ida con líneas segmentadas.

$\phi(h, i)$  ( $\bar{\phi}(h, i)$ ): Tiempo desde el centro del rojo en  $S_h$  al centro de un rojo particular en  $S_i$ . Los dos rojos son elegidos tal que cada uno está ubicado inmediatamente a la izquierda (derecha) del bandwidth en la dirección de ida (venida).  $\phi(h, i)$  ( $\bar{\phi}(h, i)$ ) es positivo si el centro del rojo de  $S_i$  cae a la derecha (izquierda) del centro de  $S_h$ , (ciclos).

$w_i$  ( $\bar{w}_i$ ): Tiempo desde el lado derecho (izquierdo) del rojo de  $S_i$  al lado izquierdo (derecho) del bandwidth de la dirección de ida (venida), (ciclos).

$m(h, i) : \phi(h, i) + \bar{\phi}(h, i)$  (número entero).

$\Delta_i$  : Tiempo desde el centro de  $\bar{r}_i$  al más cercano centro de  $r_i$  el cual es positivo si el centro de  $r_i$  está a la derecha del centro de  $\bar{r}_i$ , (ciclos).

$\tau_i$  ( $\bar{\tau}_i$ ): Tiempo de liberación de la línea de espera generada por el ingreso de tráfico desde una arteria de cruce la arteria principal. Es un adelanto del bandwidth en la dirección de ida (venida) justo al dejar  $S_i$ , (ciclos).

### 1.3. Definiciones básicas de teoría de grafos.

Esta sección está basada en Diestel [7] y en Schrijver [1]. Un *grafo finito no dirigido* es el par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito y  $E$  es una familia finita de pares de elementos de  $V$ . Los elementos de  $V$  se llaman *vértices* o *nodes* (más comúnmente *vértices*) y los elementos de  $E$  son llamados *aristas*.  $V(G)$  y  $E(G)$  será la notación para los conjuntos de vértices y aristas de  $G$  respectivamente. Un par  $e = \{u, v\} \in E(G)$  pueden aparecer más de una vez en  $E(G)$  (esto justifica el uso del término *familia*), en este caso  $e$  es llamado una *arista múltiple*. Un *lazo* es

una arista de la forma  $\{e, e\}$ . Si un grafo no tiene múltiple aristas o lazos se llama *grafo simple*.  $u$  y  $v$  en  $e = \{u, v\}$  son denominados *extremos* y se dice que  $e$  es *incidente* a  $u$  y  $v$ . El *grado* de un vértice  $v$  es denotado por  $\delta(v)$  y representa el número de aristas incidentes a  $v$  si no existe un lazo  $vv$ , caso contrario, el lazo se cuenta dos veces.

La unión e intersección de dos grafos  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  son tales que  $G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$  y  $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$ .  $G \setminus G'$  es la *diferencia* entre  $G$  y  $G'$  y resulta de remover los vértices de  $V(G) \cap V(G')$  y sus aristas incidente desde  $G$ . En el caso que  $V \subset V'$  y  $E \subset E'$  se dice  $G \subset G'$  y también  $G$  es un *subgrafo* de  $G'$ .  $G'$  es un *grafo inducido* de  $G$  si  $G' \subset G$  y  $E'(G) \subset E(G)$  con ambos extremos de cada arista dentro del conjunto  $V'(G)$ . Un grafo inducido  $G'$  es entonces el resultado de remover un subconjunto de vértices y de aristas incidentes a ellos desde un  $G$ . Si  $G' \subset G$  y  $V' = V$ , entonces  $G'$  es *subgrafo generado* de  $G$ .

Un *camino* en un grafo  $G = (V, E)$  es un subgrafo  $P$  de  $G$  donde  $V(P) = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  y  $E(P) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k\}$ , la notación  $P(v_0, v_k)$  se suele utilizar para referirse al camino desde  $v_0$  a  $v_k$ . El *largo* del camino es el número de aristas que lo componen. Un camino  $P(v_0, v_k)$  es *cerrado* si  $v_k = v_0$ . El grafo  $G = (V, E)$  es *conexo* si existe al menos un camino entre cualquier par de vértices, de otra forma es *no conexo*. Si un grafo es no conexo, entonces será formado por subgrafos conexos, cada uno de ellos es llamado *componente conexa* de  $G$ . Un *bosque* es un grafo  $T = (V, E)$  con  $|V| - 1$  aristas, cada componente conexa es llamada *árbol*. Si  $T \subset G$  es un bosque conexo, entonces es un *árbol generador* de  $G$ , de otra forma será llamado *bosque generador*.

Un *ciclo* en  $G$  es un subgrafo de un grafo  $G$  con un  $\delta(v)$  par para todo  $v \in \zeta$ . Un *circuito* es un ciclo conexo con cada uno de sus vértices de grado dos, es decir, si es un ciclo conexo simple. Un *corte* es el conjunto de todos los arcos en  $G$  que tiene un extremo en cada subconjunto de una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(G)$ .

Un *grafo dirigido finito* (*digrafo finito*) es el par  $D = (V, A)$  donde  $V$  es un conjunto finito y  $E$  es una familia finita de pares *ordenados* de elementos de  $V$ . Nuevamente los elementos de  $V$  se denominan *vértices* o *nodes* (más comúnmente *nodos*) y los elementos de  $A$  se llaman *aristas* o *arcos* (más comúnmente *arcos*). En el par  $e = (u, v) \in A(G)$ ,  $u$  y  $v$  se denominan *cola* y *cabeza* respectivamente, por lo que tiene sentido representar algunas veces  $(u, v)$  como  $u \rightarrow v$ . El número de arcos de la forma  $(u, v)$  es el *grado negativo*  $\delta^-(v)$  del nodo  $v$ , y el número de arcos de la forma  $(v, t)$  *grado positivo*  $\delta^+(v)$ . Un *camino dirigido* de un grafo dirigido  $D = (V, A)$  es un subgrafo  $Pd$  de  $D$  donde  $V(Pd) = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  y  $A(Pd) = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$ . De la misma forma que en el caso no dirigido el *largo* de un camino dirigido es el número de arcos que lo componen es denotado por  $Pd(v_0, v_k)$ .

Todo grafo dirigido tiene un grafo *subyacente* el cual es no dirigido, simplemente no hay que considerar las direcciones de los arcos. Análogamente, todo grafo no dirigido puede llegar a ser dirigido si se agrega una orientación arbitraria sobre cada arista en el grafo. Existen caminos no dirigidos  $P(v_0, v_k)$  sobre un grafo dirigido  $D = (V, A)$  with aristas (arcos) con dos posibles orientaciones *ida* o *regreso*, de la misma forma  $D$  podría tener ciclos no dirigidos. Se puede hablar de ciclos dirigidos como la unión de caminos cerrados dirigidos, sin embargo se llamará *ciclos dirigidos* a la unión de caminos cerrados no dirigidos sobre el correspondiente grafo no dirigido  $D'$  de un grafo dirigido  $D = (V, A)$ . Esto quiere decir que un ciclo dirigido siempre será uno no dirigido escogido desde  $D'$  donde cada arista puede ser de ida o de venida. En este contexto es posible definir entonces *árbol generador dirigido*.

# Capítulo 2

## Enfoques de Solución y Modelos Matemáticos.

La mayor parte de los enfoques de solución son similares y aunque el primer método que se tratará difiere de los demás por ser resuelto con un algoritmo especialmente diseñado, el modelo matemático es básicamente el mismo que el utilizado en artículos posteriores.

Este capítulo da un resumen de los modelos que a nuestro entender son la base de los trabajos más modernos que tratan el tema de sincronización, sin embargo se debe aclarar que el enfoque de Gartner [4] mencionado en el capítulo 1 no ha sido considerado en esta revisión.

### 2.1. Un primer método de solución. Caso arterial.

#### 2.1.1. Notación adicional.

En el trabajo original de Little [2] y en relación a la figura 1.1, su método considera  $\Delta_i, w_i = 0$ , por lo tanto los tiempos de luces rojas y verdes se sobreponen unos con otros en cada esquina de una red de transporte, tal como se observa en la figura 2.1.

Además:

$\theta_{ij}$ : Tiempo desde el centro de una luz roja en  $S_i$  al próximo centro en  $S_j$ . Esto es llamado fase relativa (offset). Por convención deseamos que los valores de esta variable cumplan con  $0 \leq \theta_{ij} < 1$ , (ciclos).

$x_i$ : Posición de  $S_i$  sobre la calle (metros).

$v_k(\bar{v}_k)$ : Velocidad en la dirección de ida (venida) entre los semáforos  $S_k$  y  $S_{k+1}$  y es considerada constante y conocida para todo  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , (metros/segundos).

Si  $t(h, i) = t_{ij}$  en la figura 1.1 se obtiene la notación utilizada en el clásico artículo de Morgan y Little [2] con un ligero pero importante cambio,  $\bar{t}_{ij}$  son definidos como el tiempo de viaje desde  $S_i$  a  $S_j$  en la dirección de venida (inbound). Esto ocasiona que los valores de  $\bar{t}_{ij}$  sean negativos ya que se tendrían que calcular, para el caso donde  $j = i + 1$  como:

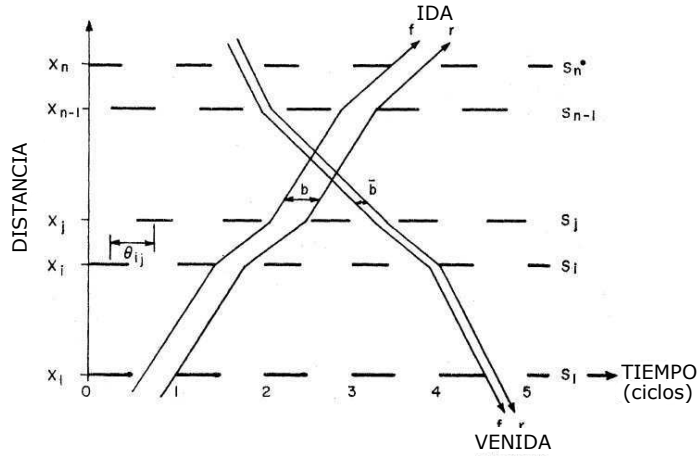


Figura 2.1: Diagrama Distancia-Tiempo. Las líneas negras representan los tiempos de luz roja y la sección vacía los tiempos de verde. (Gráfico original de Morgan y Little [2])

Therefore,  $t_{i,i+1} = \frac{x_{i+1} - x_i}{v_i C}$  and  $\bar{t}_{i,i+1} = \frac{x_i - x_{i+1}}{\bar{v}_i C}$ .

Las letras  $f$  y  $r$  en la figura 2.1 representan el borde frontal (front) y posterior (rear) del bandwidth respectivamente.

Se definirá ahora el concepto de sincronización de semáforos:

**Definición 2** (Sincronización [2]). *Es el conjunto  $\{\theta_{ij} \mid j = 1, \dots, n\}$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

### 2.1.2. Teoría del primer método para una arteria.

El método es basado sobre un consistente sucesión de lemas, teoremas y corolarios, que se detallan a continuación. Aquí cada semáforo  $S_i$  será llamado simplemente *señal*.

**Definición 3** (Señal crítica [2]). *Una señal  $S_i$  se dice crítica si un borde de las luces rojas  $S_j$ 's toca el bandwidth en una dirección y el otro lado lo toca en la otra.*

**Lema 1** ([2]). *Si una sincronización maximiza  $b + \bar{b}$  sujeto a  $b > 0$  y  $\bar{b} > 0$ , entonces:*

1. *Existe al menos una señal crítica.*
2. *El tiempo de luz roja de cualquier señal crítica tocará el borde frontal de un bandwidth y el borde posterior del otro.*
3. *Todas las señales críticas pueden ser divididas en dos grupos:*
  - *Grupo 1: Formado por la señales cuyas luces rojas tocan el borde frontal del bandwidth en la dirección de ida y el borde posterior del bandwidth en la dirección de venida (ver figura 2.2), y*
  - *Grupo 2: Formado por las señales cuyos tiempos de luces rojas tocan el borde frontal del bandwidth en la dirección de venida y el borde posterior del bandwidth en la dirección de ida (ver Figura 2.3).*



En relación a la figura 2.1, las señales  $S_i$  y  $S_j$  pertenecen a los grupos 1 y 2 respectivamente.

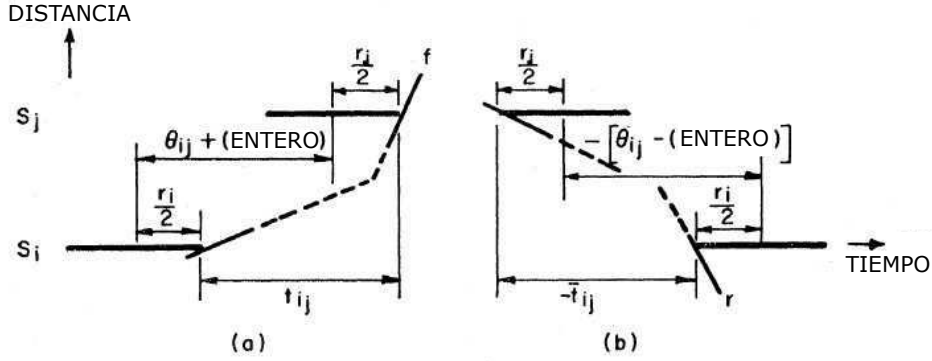


Figura 2.2: Geometría para dos señales en el grupo 1 (ver [2]).

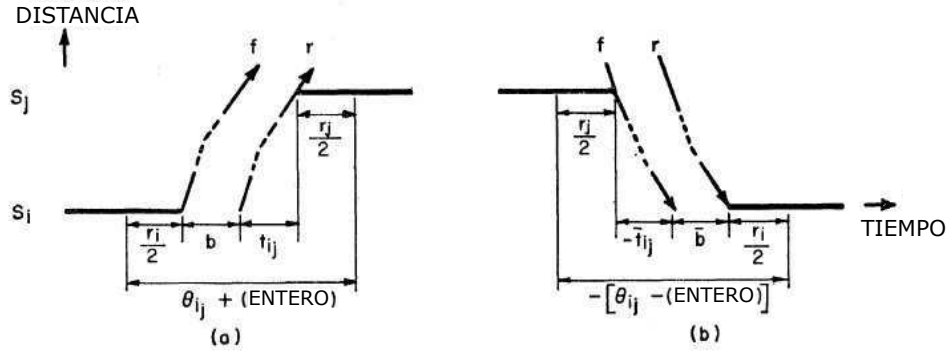


Figura 2.3: Geometría para dos señales en diferentes grupos (ver [2]).

Respecto a la figura 2.2 se puede notar que  $\frac{1}{2}r_i + t_{ij} = \frac{1}{2}r_j + \theta_{ij} + (int)$  y que  $\frac{1}{2}r_i - \bar{t}_{ij} = \frac{1}{2}r_j - \theta_{ij} + (int)$ , donde  $int = integer$  representa un entero que es sumado para mantener  $\theta$  dentro del rango  $[0, 1)$ . Hay que notar que dependiendo de la velocidad,  $int$  se incrementará tanto como ciclos hayan pasado. Ahora, al sumar ambas expresiones se obtiene:

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \frac{1}{2}(int) \quad (2.1)$$

Si se considera la figura 2.3 se obtiene la misma expresión. Además, es claro que dependiendo de si  $int$  es par o impar  $\theta_{ij}$  podrá tomar dos valores.

Una ecuación mucho más explícita puede ser deducida utilizando la función mantisa( $man$ ):  $man(\#) = \# - floor(\#)$ , donde  $\# \in \mathbb{R}$ .

Por lo tanto, desde la ecuación 2.1 se puede definir:

**Definición 4** (Sincronización de Medio Entero [2]). *Una Sincronización de Medio Entero es:*

$$\theta_{ij} = man \left[ \frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \delta_{ij} \right] \quad (2.2)$$

donde  $\delta_{ij} \in \{0, \frac{1}{2}\}$

El mismo resultado puede ser obtenido desde las señales críticas del grupo 2. Lo que se ha probado en estos últimos párrafos es lo siguiente:

**Lema 2** ([2]). *Bajo las condiciones del lemma 1, cada grupo de señales tiene sincronización de medio entero.*

También, una importante propiedad de  $\theta$  es:

$$\begin{aligned}
\theta_{ik} &= \text{man} [\theta_{ij} + \theta_{jk}] \\
&= \text{man} \left[ \text{man} \left[ \frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \delta_{ij} \right] + \text{man} \left[ \frac{1}{2}(t_{jk} + \bar{t}_{jk}) + \delta_{jk} \right] \right] \\
&= \text{man} \left[ \frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \frac{1}{2}(\text{int}) + \frac{1}{2}(t_{jk} + \bar{t}_{jk}) + \frac{1}{2}(\text{int}) \right] \\
&= \text{man} \left[ \frac{1}{2}(t_{ik} + \bar{t}_{ik}) + \frac{1}{2}(\text{int}) \right] \\
&= \text{man} \left[ \text{man} \left[ \frac{1}{2}(t_{ik} + \bar{t}_{ik}) + \delta_{ik} \right] \right] \\
&= \text{man} \left[ \frac{1}{2}(t_{ik} + \bar{t}_{ik}) + \delta_{ik} \right]
\end{aligned}$$

**Teorema 1** ([2]). *Existe una sincronización de medio entero que maximiza bandwidths de igual ancho.*

El esquema de la prueba es más bien geométrica, constructiva y fácil de seguir, ya que trata de construir paso a paso una sincronización de medio entero a partir del supuesto que se tiene una que produce el máximo de la suma de los bandwidths en ambas direcciones ( $b + \bar{b}$ ), ver [2].

También en la prueba se demuestran dos hechos importantes, el primero es:

**Corolario 1** ([2]). *Si se tiene que el máximo de  $b + \bar{b}$  es mayor que cero,  $\max(b + \bar{b})$  sujeto a  $b > 0$  and  $\bar{b} > 0$  es siempre igual a  $\max(b + \bar{b})$  subject to  $b = \bar{b}$ .*

Y el segundo hecho es que si se obtiene  $b = \bar{b}$  en el proceso de  $\max(b + \bar{b})$  sujeto a  $b > 0$  and  $\bar{b} > 0$  y  $S_i, S_j$  están en diferentes grupos, entonces  $S_i$  y  $S_j$  también tiene sincronización de medio entero. Esto es fácilmente verificable de la siguiente forma, en la figura 2.3 (a)  $\frac{1}{2}r_i + b + t_{ij} + \frac{1}{2}r_j = \theta_{ij} + (\text{int})$ , y desde la figura 2.3 (b)  $\frac{1}{2}r_i + \bar{b} - \bar{t}_{ij} + \frac{1}{2}r_j = -\theta_{ij} + (\text{int})$ , y restando la segunda ecuación desde la primera se obtiene:

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \frac{1}{2}(\text{int})$$

**Teorema 2** ([2]). *Bajo cualquier sincronización de medio entero,  $b = \bar{b}$ .*

*Demostración.* Debido a que las señales críticas definen cotas para los bandwidths, Es suficiente considerar señales críticas para el análisis. Nuevamente en relación a las figuras 2.3 (a) y (b),

$$\left[ \frac{1}{2}r_i + b + t_{ij} + \frac{1}{2}r_j = \theta_{ij} + (\text{int}) \right] - \left[ \frac{1}{2}r_i + \bar{b} - \bar{t}_{ij} + \frac{1}{2}r_j = -\theta_{ij} + (\text{int}) \right]$$

$$\Rightarrow b - \bar{b} + t_{ij} + \bar{t}_{ij} = 2\theta_{ij} + (int)$$

$$\Rightarrow \frac{b - \bar{b}}{2} + \frac{t_{ij} + \bar{t}_{ij}}{2} + \frac{1}{2}(int) = \theta_{ij}$$

$$\text{y porque } \theta_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \frac{1}{2}(int) \Rightarrow b = \bar{b} \quad \square$$

### 2.1.3. Procedimientos para el algoritmo de 1964.

#### Procedimiento SEB.

Para construir el método SEB (por sus siglas en inglés: Synchronization for Equal Bandwidth) para el problema 1, Morgan y Little solo enfocaron su búsqueda en sincronizaciones de medio entero y analizaron el bandwidth en una sola dirección (ida), esto gracias a los teoremas 1 2 respectivamente.

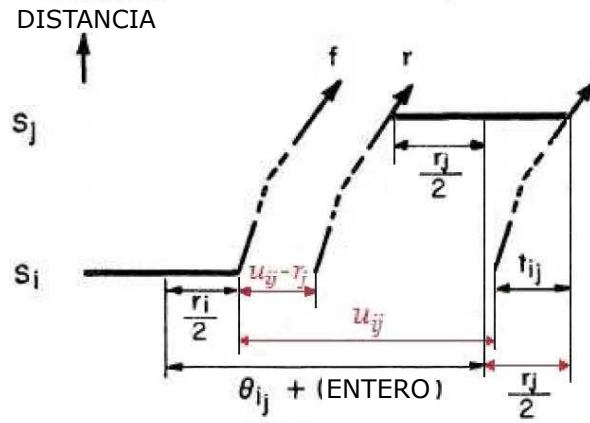


Figura 2.4: Geometría para el procedimiento SEB (ver [2]).

**Teorema 3** ([2]). *La máxima suma de bandwidths iguales es alcanzada con  $\max\{0, B\}$  donde,*

$$B = \max_i \min_j \max_{\delta \in \{0,1\}} \{u_{ij}(\delta) - r_j\}$$

Sea  $i = c$  un maximizador  $i$  y  $\delta_{c1}, \dots, \delta_{cn}$  los correspondientes maximizadores  $\delta$ 's. Entonces, una sincronización para la máxima suma de bandwidths iguales  $\theta_{c1}, \dots, \theta_{cn}$  se logra substituyendo el  $\delta_{cj}$  en  $\theta_{ij} = \max \left[ \frac{1}{2}(t_{ij} + \bar{t}_{ij}) + \delta_{ij} \right]$

*Demostración.* En relación a la figura 2.4, se tiene  $u_{ij} = \max \left[ \theta_{ij} + \frac{r_j}{2} - \frac{r_i}{2} - t_{ij} \right]$ , pero para hacer  $u_{ij} = 1$  justo cuando esta expresión es cero, puede ser escrita como  $u_{ij} = 1 - \max \left[ -\theta_{ij} - \frac{r_j}{2} + \frac{r_i}{2} + t_{ij} \right]$  y reemplazando  $\theta$  desde la ecuación 2.2, se tiene,

$$u_{ij}(\delta_{ij}) = 1 - \max \left[ \frac{1}{2}(r_i - r_j) + \frac{1}{2}(t_{ij} - \bar{t}_{ij}) - \delta_{ij} \right] \quad (2.3)$$

Ya que  $\delta_{ij} \in \{0, \frac{1}{2}\}$  y de acuerdo a la figura 2.4, el mejor valor para  $\delta_{ij}$  puede ser obtenido por,

$$\max_{\delta \in \{0,1\}} [u_{ij}(\delta) - r_j]$$

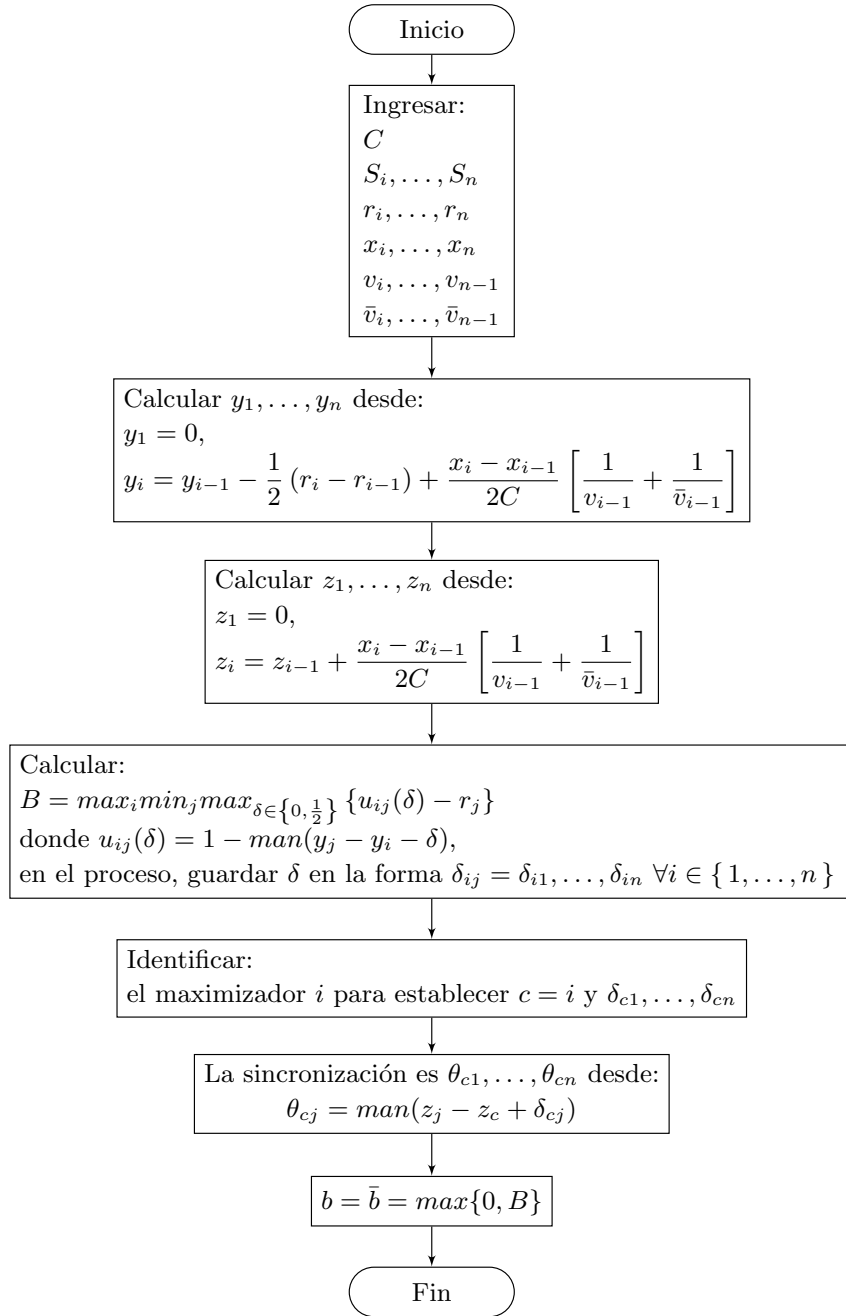


Figura 2.5: Procedimiento SEB.

Sea,

$b_i$  : El más grande bandwidth en la dirección de ida bajo la sincronización de medio entero si el tiempo de luz roja  $S_i$  toca el borde frontal de la misma.

$B$  : El valor de una de las máximas sumas de bandwidths iguales en ambas direcciones.

Entonces:

$b_i = \min_j \max_{\delta \in \{0,1\}} [u_{ij}(\delta) - r_j]$  ya que las trayectorias no deberían cruzar las líneas rojas. Por lo tanto el mejor  $i$  es tal que,

$$B = \max_i \min_j \max_{\delta \in \{0,1\}} \{u_{ij}(\delta) - r_j\}$$

Si el mejor  $i$  es igual a  $c$ , y  $\delta_{c1}, \dots, \delta_{cn}$  los maximizadores  $\delta$ 's, la sincronización se logrará sustituyendo los  $\delta_{cj}$ 'sen la ecuación 2.3 para obtener el conjunto  $\{\theta_{c1}, \dots, \theta_{cn}\}$  □

El procedimiento SEB se resume en la figura 2.5.

### Procedimiento SUB.

Luego de resolver la maximización para la suma de bandwidths iguales en ambas direcciones, los esfuerzos se centraron en el problema 2, al desarrollar el procedimiento SUB (por sus siglas en inglés: Synchronization for Unequal Bandwidth). Claramente un pelotón (grupo de vehículos) necesita algún tiempo para cruzar una semáforo, y el largo del pelotón (que es medido en segundos) podría llegar a ser diferente en ambas direcciones.

El tiempo que a un pelotón le toma pasar de una señal a otra consecutiva sobre una arteria claramente afecta la sincronización, por lo tanto el primer paso es evaluar que tanto una luz roja puede ser movida (procedimiento de movimiento) con el fin de evitar que los vehículos se detengan en cada señal. Es claro también que debe existir un límite para este movimiento.

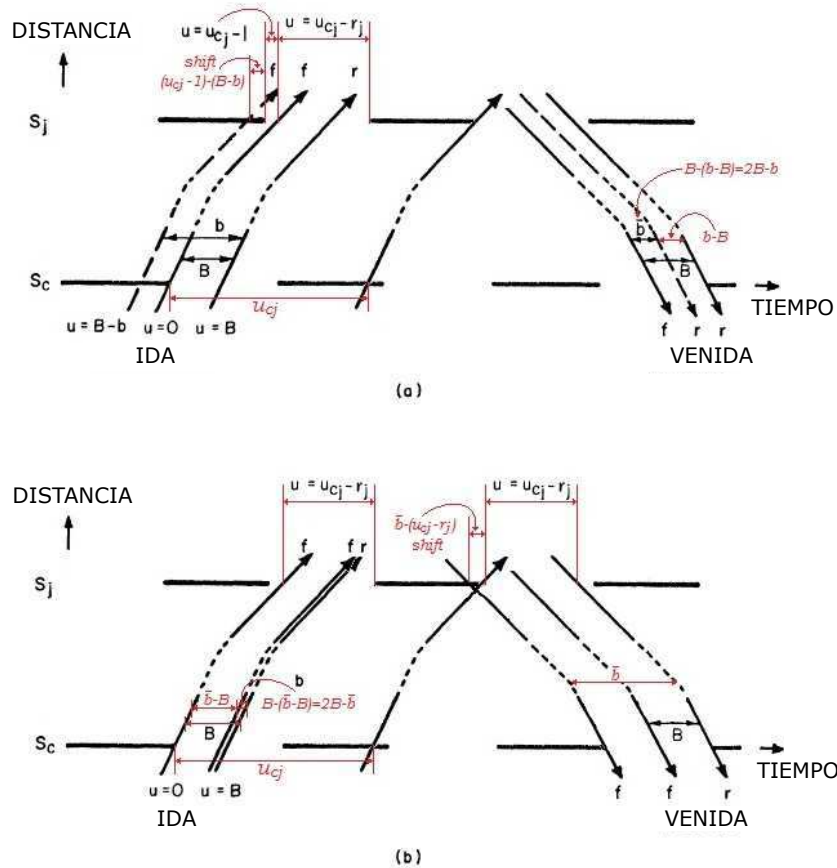


Figura 2.6: Geometría para el Procedimiento de Movimiento (ver [2]).

**Teorema 4** (El Procedimiento Movimiento [2]). *El bandwidth en la dirección de ida  $b$ , se le puede asignar cualquier valor en  $\max\{0, B\} \leq b \leq g$ , haciendo el siguiente movimiento de la fase relativa:*

$$\alpha_j = \max\{u_{cj} - 1 + b - B, 0\}$$

Entonces  $\bar{b} = \max\{2B - b, 0\}$  y  $\bar{b}$  es tan grande como pueda sea posible para un  $b$  dado.

De la misma forma, el bandwidth en la dirección de venida  $\bar{b}$ , se le puede asignar un valor en  $\max\{0, B\} \leq \bar{b} \leq g$ , haciendo el siguiente movimiento de la fase relativa:

$$\alpha_j = \max\{\bar{b} + r_j - u_{cj}, 0\}$$

Entonces  $b = \max\{2B - \bar{b}, 0\}$  y  $b$  es tan grande como pueda sea posible para un  $\bar{b}$  dado.

*Demostración.* Sea,

$\theta_{c1}, \dots, \theta_{cn}$  : La sincronización que produce el máximo valor de la suma de los bandwidths iguales obtenida con el procedimiento SEB y con  $S_c$  la señal crítica cuya luz roja toca el borde frontal del bandwidth en la dirección de ida (ver figura 2.6). Los correspondientes  $u_{c1}, \dots, u_{cn}$  y  $B$  también se suponen conocidos.

$\alpha_j$  : Un movimiento de la fase relativa para  $S_j$ , (ciclos).

$\theta'_{cj} = \max\{\theta_{cj} - \alpha_j\}$  : Fase relativa ajustada para  $S_j$ , (ciclos).

$g = \min_i\{1 - r_i\}$  : El más pequeño tiempo de luz verde entre las señales, (ciclos).

Respecto a la figura 2.6 (a), suponga que se desea mover  $S_j$  a la izquierda porque se quiere incrementar el bandwidth en la dirección de ida desde  $B$  a  $b$ .  $\bar{b}$  se reducirá tanto como  $b$  es incrementado. Esto es gracias al corolario 1. Además, debido a que las señales limitan el movimiento, éste puede ser a lo mucho  $g$ . Por lo tanto,  $\max\{0, B\} \leq b \leq g$  y  $\bar{b} = \max\{2B - b, 0\}$ . Un argumento similar se puede utilizar para incrementar  $\bar{b}$ , entonces  $\max\{0, B\} \leq \bar{b} \leq g$  y  $b = \max\{2B - \bar{b}, 0\}$ , ver figura 2.6(b).

Al ubicarse sobre el lado derecho del tiempo de luz roja  $S_j$  en la figura 2.6 (a), Se puede notar que el movimiento para  $S_j$  es a la izquierda dado por  $\alpha_j = \max\{u_{cj} - 1 + b - B, 0\}$ . Además, Es cierto gracias a la figura 2.6 (b), que la distancia desde el borde frontal del bandwidth en la dirección de venida al siguiente tiempo de luz roja  $S_j$  sobre la izquierda es la misma que la distancia desde la parte posterior del bandwidth en la dirección de venida al siguiente tiempo de luz roja  $S_j$  sobre la derecha, Esto es debido al teorema 2 para mantener constante  $b + \bar{b}$ . También se puede observar en la figura 2.6 (b) que para incrementar  $\bar{b}$  es necesario mover  $\alpha_j = \max\{\bar{b} + r_j - u_{cj}, 0\}$  a  $S_j$ . □

Luego de revisar las reglas para el movimiento de señales se define el Procedimiento SUB como sigue:

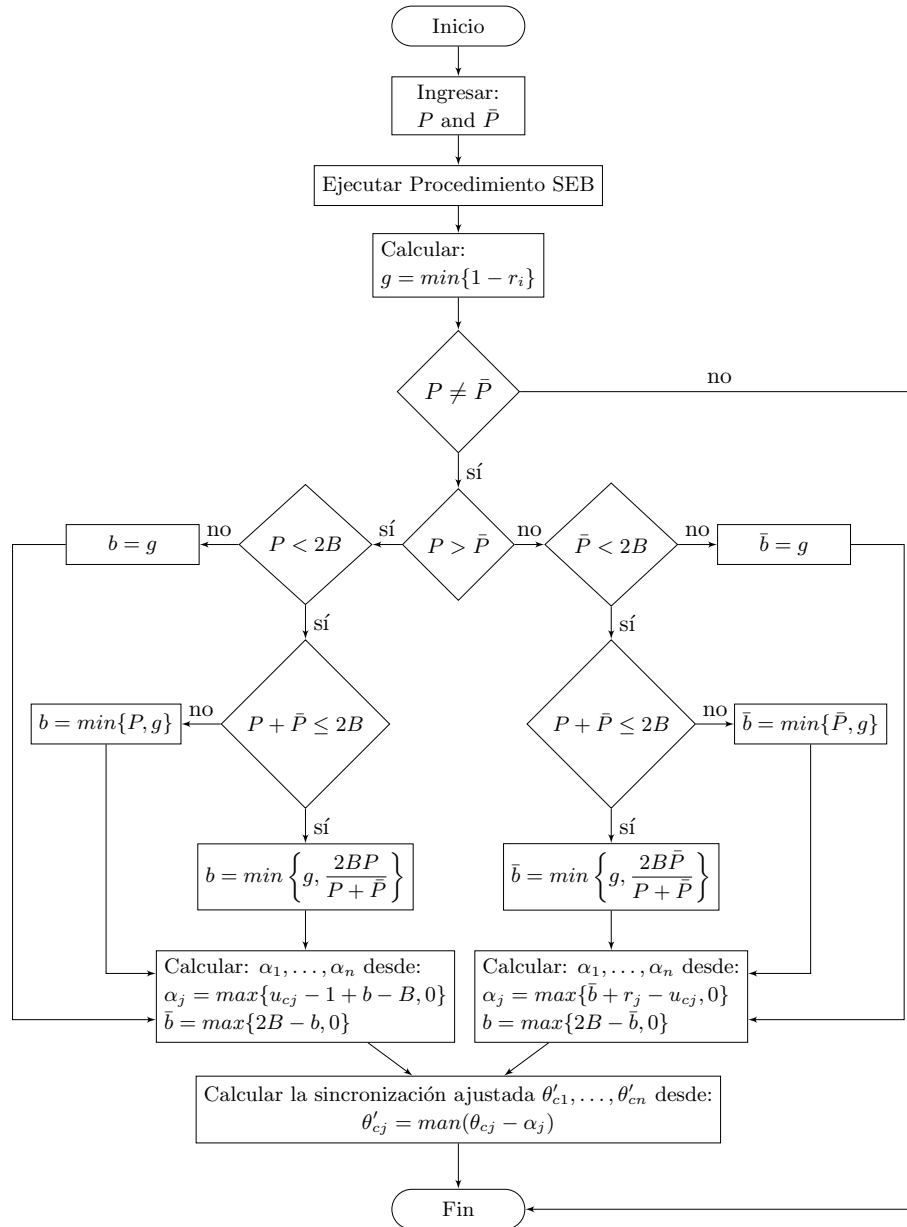


Figura 2.7: Procedimiento SUB

Sea,

$P(\bar{P})$  : Largo del pelotón en la dirección de ida (venida), (cycles).

Si  $P = \bar{P}$ , la sincronización dada por el procedimiento SEB es aceptada. Caso contrario, si  $P + \bar{P} \leq 2B$  entonces es posible hacer un movimiento para que ambos pelotones puedan cruzar de una señal a otra consecutiva sin parar y los bandwidths son divididos proporcionalmente al largo de los pelotones si es posible. Por lo tanto si  $P > \bar{P}$ ,

$$b = \min \left\{ \frac{2BP}{P + \bar{P}}, g \right\} \text{ and } \bar{b} = [2B - b, 0].$$

Por otro lado si  $P + \bar{P} > 2B$  y si es posible, el pelotón cuyo tiempo es el más largo es acomodado para cruzar sin parar, y el tiempo que sobre se lo asigna al más pequeño, por su puesto si existe este sobrante, es decir si  $P > \bar{P}$ ,

$$b = \min\{P, g\} \text{ and } \bar{b} = \max\{2B - b, 0\}.$$

Además, si  $P \geq 2B$  entonces  $\bar{b}$  será cero y  $b$  será  $g$ . Argumento similares se aplican si  $\bar{P} > P$ .

El procedimiento SUB se resume en la figura 2.7.

Los procedimientos SEB y SUB se han programado en el lenguaje *Matlab*<sup>®</sup> *R2013a* y el ejemplo presentado en [2] (synchronization of the signals on a stretch of Euclid Avenue in Cleveland under off-rush hour conditions) se ha reproducido, ver apéndice A. Además es este algoritmo completo el que se ha utilizado para ejemplos simulados sobre una arteria particular de la ciudad de Guayaquil, como se verá un capítulo posterior.

Para concluir se responde a la siguiente pregunta, ¿Qué sucede con el caso unidireccional?. Gracias a los resultados mostrados hasta ahora esta pregunta se resuelve con facilidad asignando al pelotón en la dirección de ida el largo  $2B$  y en ese caso el bandwidth tomará el valor del mínimo verde  $g$  en esa dirección, como debe esperarse ya que no se necesitaba del algoritmo para saberlo.

## 2.2. Modelos lineales para sincronización.

Como se mencionó en la introducción, el modelo de Morgan y Little del año 1964 marcó un inicio de la investigación en este campo, más aún cuando los problemas de tráfico se han ido incrementando a través de los años. Los mismos autores siguieron la tendencia del uso de modelos lineales que eran ya muy populares en esa época (de hecho siguieron los consejos de un colega) y se embarcaron en el desafío de resolver el problema 1, presentado en el primer capítulo, bajo este esquema.

Esta sección muestra un resumen de los modelos lineales que son hasta el día de hoy fundamentales en la investigación de la sincronización de semáforos.

### 2.2.1. Modelos lineales para el caso arterial.

Las ecuaciones y desigualdades más generales para todos los modelos lineales pueden ser obtenidas haciendo referencia a la figura 1.1. Las primeras dos desigualdades aseguran que los bandwidths en ambas direcciones permanezcan dentro del tiempo de luz verde en cada señal:

$$w_i + b \leq 1 - r_i \tag{2.4}$$

and

$$\bar{w}_i + \bar{b} \leq 1 - r_i. \tag{2.5}$$

El tiempo desde **A** a **B** puede ser calculado utilizando las cantidades mostradas en la figura 1.1 en la dirección de ida y de regreso sobre la arteria.  $Time_{A-B} = \Delta_h + int + \phi(h, i)$  y  $Time_{B-A} = int - \bar{\phi}(h, i) + int + \Delta_i$ , por lo tanto, al igualar las expresiones se tiene:

$$\phi(h, i) + \bar{\phi}(h, i) + \Delta_h - \Delta_i = m(h, i), \tag{2.6}$$



sone  $m(h, i)$  es la suma de todas las cantidades enteras  $int$ . Es importante notar además que la ecuación (2.6) es de hecho un loop (ida y vuelta)  $S_h \rightarrow S_i \rightarrow S_h$  lo que significa que la suma de los tiempos alrededor de este loop es un número entero. n caso más general se verá en la definición de loop o ciclo en una red.

En la figura 1.1 también puede verse que  $Time_{C-D} = \phi(h, i) + \frac{1}{2}r_i + w_i + \tau_i = \frac{1}{2}r_h + w_h + t(h, i)$  y  $Time_{E-F} = \bar{\phi}(h, i) + \frac{1}{2}\bar{r}_i + \bar{w}_i = \frac{1}{2}\bar{r}_h + \bar{w}_h - \bar{\tau}_h + \bar{t}(h, i)$ , y sustituyendo estas ecuaciones en (2.6) se logra:

$$t(h, i) + \bar{t}(h, i) + \frac{1}{2}(r_h + \bar{r}_h) + (w_h + \bar{w}_h) - \frac{1}{2}(r_i + \bar{r}_i) - (w_i + \bar{w}_i) - (\tau_i + \bar{\tau}_h) + (\Delta_h - \Delta_i) = m(h, i). \quad (2.7)$$

El primer modelo y más básico, que resuelve el problema 1 del capítulo 1 puede ser visto en Little [3] y una variante de este en Little et al.[5]. El modelo lineal es simple y se muestra en la tabla LM 2.1.

---

**LM 2.1** Formulación básica para maximizar suma de bandwidths iguales.

---

Función objetivo:

$$maximizar \quad b + \bar{b} \quad (2.8)$$

Sujeto a:

$$b = \bar{b} \quad (2.9)$$

$$w_i + b \leq 1 - r_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

$$\bar{w}_i + \bar{b} \leq 1 - \bar{r}_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

$$(w_i + \bar{w}_i) - (w_{i+1} + \bar{w}_{i+1}) + (t_i + \bar{t}_i) = m_i - (r_i - r_{i+1}) \quad \forall i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.12)$$

$$m_i = integer \quad \forall i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.13)$$

$$b, \bar{b}, w_i, \bar{w}_i \geq 0 \quad (2.14)$$


---

Las restricciones son deducidas considerando una simplificación de la figura 1.1. Se a supuesto que los  $\Delta$ 's y los  $\tau$ 's son cero, es decir, tiempos de luces rojas en la dirección de ida y de regreso se sobreponen una con otra, y además tampoco no se consideran tiempos de liberación de líneas de espera. También, la notación es reducida con un cambio muy simple, supone dos consecutivos índices  $(h, i)$ . por lo tanto, puede escribirse  $x(h, i) = x(i, i + 1)$  y  $x_i = x(i, i + 1)$  para todo  $x \in \{t, \bar{t}, m, \phi, \bar{\phi}\}$ .

Con estos cambios, la ecuación (2.7) se convertirá en la ecuación (2.12) para todas las señales consecutivas.

En Little et al. [5] se presenta el mismo modelo pero con la suposición adicional que los  $\Delta$ 's y los  $\tau$ 's no son cero. También se tienen nuevas restricciones que ayudan a decidir cuando debe ocurrir un giro a la izquierda en una intersección de la red a lo largo de una arteria, siempre que una flecha verde lo permita. El modelo especifica un conjunto de posibles esquemas de giro,

y decide entre éstos, cuál maximiza la suma de los bandwidths  $b + \bar{b}$ . La figura 2.8 muestra los mismos cuatro diferentes esquemas de giros a la izquierda que se puede observar en [5].

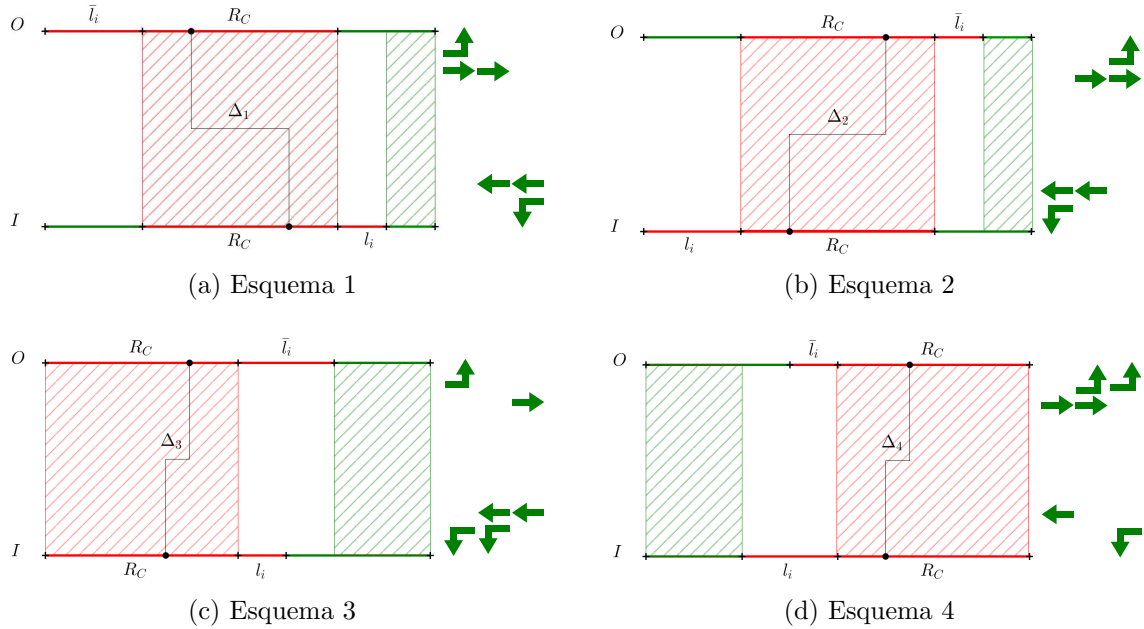


Figura 2.8: Esquemas de giro a la izquierda.  $l_i$  y  $\bar{l}_i$  representan el tiempo de giros a la izquierda en las direcciones de ida y venida respectivamente.  $R_C$  es el tiempo de luz roja común, en el cual la calle que intersecta la arteria tiene luz verde para el tránsito vehicular.

Los parámetros  $l_i$ ,  $\bar{l}_i$  y  $R_C$  son medidos en unidades de ciclos. Por ejemplo, la figura 2.8b muestra el caso de la figura 1.1, con una luz roja movida a la derecha en la dirección de venida, ver figura 2.9.

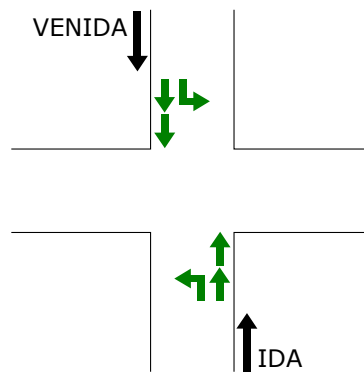


Figura 2.9: Una intersección de dos calles y un esquema de giro a la izquierda.

Cada uno de los  $\Delta_i$  de los cuatro esquemas presentados de giro a la izquierda pueden ser expresados como una función de  $l_i$  y  $\bar{l}_i$ . Por ejemplo, en relación a la figura 2.8a y calculando la distancia entre el centro de todo el tiempo rojo en la dirección de ida y el centro de todo el tiempo de rojo en la dirección de venida (en ese orden), se obtiene:

$$\Delta_i = \frac{\bar{l}_i + R_C}{2} - \left( \frac{R_C + l_i}{2} + \bar{l}_i \right) = -\frac{l_i + \bar{l}_i}{2}$$

Los cálculos para los otros esquemas son presentado en la tabla 2.1. Todas las estas expresiones pueden ser reducidas a una simple ecuación utilizando  $\Delta_i = \frac{1}{2}[(2\delta_i - 1)l_i - (2\bar{\delta}_i - 1)\bar{l}_i]$  donde  $\delta_i, \bar{\delta}_i \in \{1, 0\}$ , esto logra que la inclusión de los  $\Delta$ 's en el modelo lineal se facilite.

Tabla 2.1: Expresiones para los valores de  $\Delta_i$

Esquema en:	$\Delta_i$	$\delta_i$	$\bar{\delta}_i$
Figura 2.8a	$-\frac{l_i + \bar{l}_i}{2}$	0	1
Figura 2.8b	$\frac{l_i + \bar{l}_i}{2}$	1	0
Figura 2.8c	$-\frac{l_i - \bar{l}_i}{2}$	0	0
Figura 2.8d	$\frac{l_i - \bar{l}_i}{2}$	1	1

El modelo lineal presentado en [5] tiene una generalización adicional que también puede ser vista en [3]. El largo del ciclo (el cual es fijo en la tabla LM 2.1) y las velocidades son consideradas como variables.

Para escribir el modelo es necesario introducir una nueva notación:

$T$  : Largo del Ciclo, (segundos).

$z = \frac{1}{T}$  : Frecuencia de la señal, (ciclos/segundos).

$T_1, T_2$  : Limites inferior y superior para el largo del ciclo, (segundos).

$d(h, i)$  ( $\bar{d}(h, i)$ ): Distancia entre  $S_h$  y  $S_i$  en la dirección de ida (venida),(metros).

$e_i, f_i$  ( $\bar{e}_i, \bar{f}_i$ ): Limites inferiores y superiores de las velocidades en la dirección de ida (venida), (metros/segundos).

$\frac{1}{h_i}, \frac{1}{g_i}$  ( $\frac{1}{\bar{h}_i}, \frac{1}{\bar{g}_i}$ ) : Limites recíprocos inferiores y superiores de los cambios de velocidad en la dirección de ida (venida), (segundos/metros).

En este punto se debe considerar lo siguiente. Debido a que se desea restricciones lineales, No es posible considerar directamente las desigualdades  $e_i \leq v_i \leq f_i$  ya que el largo del ciclo es también una variable. Si se trata de pasar de  $v_i$  en metros/segundos a  $v_i$  en metros/ciclos, esto

resultará en  $e_i T \leq v_i T \leq f_i T$  las cuales son restricciones no lineales. Para superar este problema se utilizan los recíprocos de  $e_i$  y  $f_i$ :

$$e_i \leq v_i \leq f_i \quad \rightarrow \quad \frac{d_i}{f_i} \leq \frac{d_i}{v_i} \leq \frac{d_i}{e_i} \quad \rightarrow \quad \frac{d_i}{f_i} z \leq t_i \leq \frac{d_i}{e_i} z$$

las cuales son restricciones lineales. El mismo criterio se aplica para los cambios de velocidad, que son introducidas en el modelo para evitar cambios bruscos desde una calle a otra:

$$\frac{1}{h_i} \leq \frac{1}{v_{i+1}} - \frac{1}{v_i} \leq \frac{1}{g_i} \rightarrow \frac{d_i}{h_i} z \leq \frac{d_i}{d_{i+1}} \frac{d_{i+1}}{v_{i+1}} z - \frac{d_i}{v_i} z \leq \frac{d_i}{g_i} z \rightarrow \frac{d_i}{h_i} z \leq \frac{d_i}{d_{i+1}} t_{i+1} - t_i \leq \frac{d_i}{g_i} z$$

La formulación completa del modelo de programación lineal entera para el modelo MAXBAND propuesto por Little et al. [5] después de las generalizaciones presentadas se observan en la tabla LM 2.2.

---

## LM 2.2 MAXBAND

---

Función objetivo:

$$\text{maximizar } b + \bar{b} \tag{2.15}$$

Sujeto a:

$$\bar{b} = kb \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{T_2} \leq z \leq \frac{1}{T_1} \tag{2.17}$$

$$w_i + b \leq 1 - r_i \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{2.18}$$

$$\bar{w}_i + \bar{b} \leq 1 - r_i \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{2.19}$$

$$(w_i + \bar{w}_i) - (w_{i+1} + \bar{w}_{i+1}) + (t_i + \bar{t}_i) + (\delta_i l_i - \bar{\delta}_i \bar{l}_i) \tag{2.20}$$

$$- (\delta_{i+1} l_{i+1} - \bar{\delta}_{i+1} \bar{l}_{i+1}) + (r_i - r_{i+1}) - (\tau_{i+1} + \bar{\tau}_i) = m_i \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \tag{2.21}$$

$$\left( \frac{d_i}{f_i} \right) z \leq t_i \leq \left( \frac{d_i}{e_i} \right) z \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \tag{2.22}$$

$$\left( \frac{d_i}{\bar{f}_i} \right) z \leq \bar{t}_i \leq \left( \frac{d_i}{\bar{e}_i} \right) z \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \tag{2.23}$$

$$\left( \frac{d_i}{h_i} \right) z \leq \left( \frac{d_i}{d_{i+1}} \right) t_{i+1} - t_i \leq \left( \frac{d_i}{g_i} \right) z \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \tag{2.24}$$

$$\left( \frac{d_i}{\bar{h}_i} \right) z \leq \left( \frac{d_i}{d_{i+1}} \right) \bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i \leq \left( \frac{d_i}{\bar{g}_i} \right) z \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \tag{2.25}$$

$$m_i = \text{integer} \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \tag{2.26}$$

$$b, \bar{b}, w_i, \bar{w}_i \geq 0 \tag{2.27}$$


---

Este modelo permite también que los bandwidths en ambas direcciones puedan ser diferentes, ver ecuación (2.16), imponiendo también que un bandwidth en una dirección determinada sea

una proporción  $k$  del otro. Además, se supone que en cada intersección los valores de  $l_i$  y  $\bar{l}_i$  permanezcan constantes. Esto último puede ser cambiado dependiendo de las particularidades de un problema específico.

Con un pequeño cambio, un modelo similar se muestra en [3]. El conjunto de restricciones (2.21) en LM 2.2 es reemplazado por el conjunto (2.28).

$$(w_i + \bar{w}_i) - (w_{i+1} + \bar{w}_{i+1}) + (t_i + \bar{t}_i) = m_i - (r_i - r_{i+1}), \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (2.28)$$

Si se quiere que los tiempos de viaje entre señales y los bandwidths en ambas direcciones sean iguales, es decir,  $t_i = \bar{t}_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $b = \bar{b}$ , entonces LM 2.2 puede ser reducido de forma considerable.

LM 2.3 puede ser fácilmente deducido utilizando los siguientes dos teoremas. Básicamente, ambos se preocupan solo en probar la factibilidad bajo el supuesto de  $t_i = \bar{t}_i$  ya que esto no afecta la función objetivo.

**Teorema 5** ([3]). *Si los límites sobre las velocidades son los mismos en cada dirección, y si LM 2.2 tiene alguna solución óptima, entonces LM 2.2 tiene una solución óptima en la cual  $t_i = \bar{t}_i$  para cada  $i$ .*

**Teorema 6** ([3]). *Si se quiere que los bandwidths en cada dirección sean iguales, y si LM 2.2 tiene alguna solución óptima, entonces LM 2.2 tiene una solución óptima en la cual  $w_i = \bar{w}_i$  para cada  $i$ .*

En ambos teoremas se han considerado las restricciones (2.28) en LM 2.2 en lugar del conjunto de restricciones (2.21).

---

### LM 2.3 Formulación para maximizar la suma bandwidths iguales. Caso Simétrico.

---

Función objetivo:

$$\text{maximizar } b \quad (2.29)$$

Sujeto a:

$$\frac{1}{T_2} \leq z \leq \frac{1}{T_1} \quad (2.30)$$

$$w_i + b \leq 1 - r_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

$$w_i - w_{i+1} + t_i = \frac{1}{2}m_i - \frac{1}{2}(r_i - r_{i+1}) \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (2.32)$$

$$\left( \frac{d_i}{f_i} \right) z \leq t_i \leq \left( \frac{d_i}{e_i} \right) z \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (2.33)$$

$$\left( \frac{d_i}{h_i} \right) z \leq \left( \frac{d_i}{d_{i+1}} \right) t_{i+1} - t_i \leq \left( \frac{d_i}{g_i} \right) z \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \quad (2.34)$$

$$m_i = \text{integer} \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (2.35)$$

$$b, w_i \geq 0 \quad (2.36)$$


---

### 2.2.2. Calculando la sincronización.

La sincronización (ver definición 2) es determinada utilizando las variables obtenidas por los modelos lineales.

Si  $\theta$  es tal como se definió en la sección 2.1 y los  $\Delta$ 's y  $\tau$ 's iguales a cero, se tiene que:

$$\theta(h, i) = \text{man}(\phi(h, i)) \quad (2.37)$$

$$\theta(1, i) = \text{man} \left( w_1 - w_i + \sum_{k=1}^{i-1} t_k + \frac{1}{2}(r_1 - r_i) \right) \quad (2.38)$$

El caso simétrico en LM 2.3 es más simple:

$$\theta(1, i) = \text{man} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} m_k \right) \quad (2.39)$$

ya que en este caso  $\phi(h, i) = \frac{1}{2}m(h, i)$ .

En los casos más generales estos valores se obtienen de forma similar.

# Capítulo 3

## Sincronización sobre una red.

Los modelos presentados hasta ahora se aplican sobre una arteria, y en una red de transporte, ésta es un calle o avenida (de dos vías) que no posee ciclos (loops). El considerar cualquier movimiento de los vehículos sobre la red, incluyendo ir desde una esquina a otra y regresar, siguiendo alguna ruta que lo permita, convierte al problema de sincronización, en uno mucho más difícil de resolver, ya que como se verá en este capítulo, en el modelo lineal ingresan nuevas variables enteras.

En esta parte del documento se enfoca en la forma que tienen las restricciones adicionales que se agregan al problema de sincronización, y en el número de éstas que se necesitan. Un poco de álgebra lineal ayudará con eso.

### 3.1. Ciclos en el PSS.

En el trabajo de Little [3] del año 1966, se da una introducción de como el problema de sincronización de semáforos sobre una red debe ser tratado. Allí, se especifica la forma de las restricciones de ciclos, la cual será explicada en la siguiente sección. Pero por ahora, se desea explicar el por qué es tan complicado resolver el PSS sobre una red.

El problema es difícil desde el punto vista computacional, ya que es un problema multi-arterial y todas las restricciones del modelo para una arteria (para cada una de las arterias en una red) deben repetirse en el modelo más general, y cada una de ellas maneja en sus restricciones variables enteras. Claro, la complejidad crece aún más si los movimientos circulares deben considerarse también. Las restricciones de ciclos dependen del número de arterias que han sido escogidas para ser sincronizadas en una red de transporte y como éstas interactúan unas con otras para formar ciclos. Si el problema se requiere de un problema de una talla más pequeña, un número pequeño de arterias deben ser elegidas.

No es muy difícil ver cuántos ciclos son formados cuando las arterias se escogen sobre un grafo de rejilla (grid graph) de pequeña dimensión. Un ejemplo sobre un  $2 \times 3$  grid graph se muestra en la figura 3.1. Si las arteria (1, 2) y (5, 6) se escogen para sincronizar y si no se requiere interacción entre ellas, entonces no habrá restricciones de ciclos, porque el problema puede tratarse, para cada arteria, de forma independiente. Sin embargo, si se desea considerar interacción, las restricciones de ciclos deberán ser tomadas en cuenta y su número dependerá del nivel de interacción deseado entre ellas. La figura 3.1c muestra el ciclo  $\{1, 2, 6, 5, 1\}$ , si se desea un alto

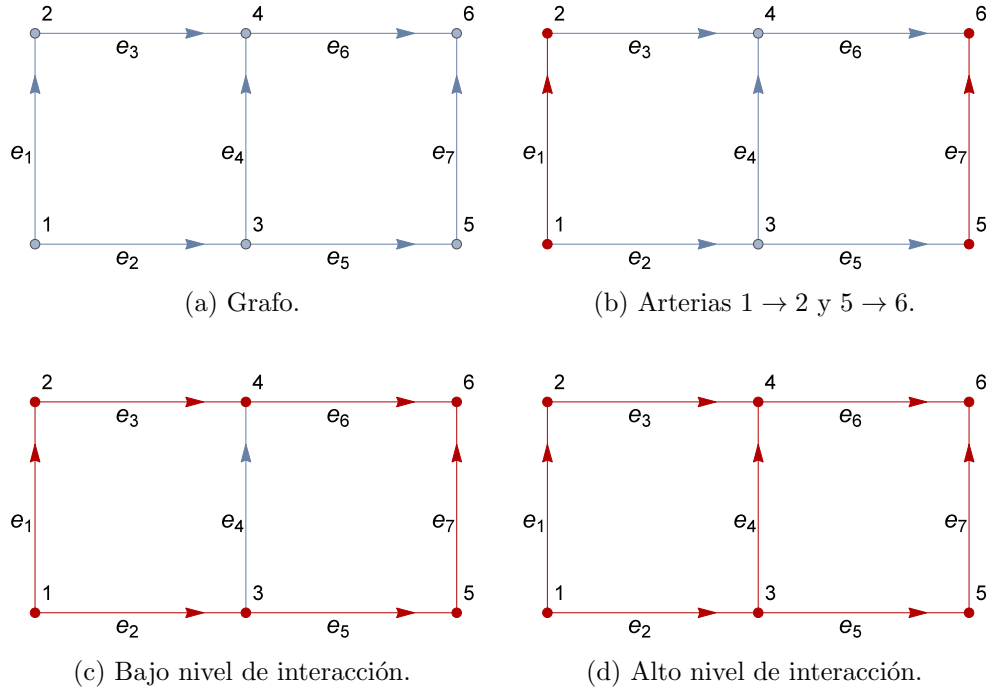


Figura 3.1: Arteria y ciclos en un grid graph de  $2 \times 3$ .

nivel de interacción, por ejemplo, si se quiere sincronizar incluyendo la arteria  $(3, 4)$ , entonces se formarán ciclos adicionales. En la figura 3.1d, se han agregado los ciclos  $\{1, 2, 4, 3, 1\}$  and  $\{3, 4, 6, 5, 3\}$ , ambos junto con  $\{1, 2, 6, 5, 1\}$  forman el conjunto de todos los ciclos sobre la red. Este conjunto corresponde al más alto nivel de interacción entre las arterias seleccionas para la sincronización. El mismo conjunto puede ser obtenido si las arterias seleccionas hubieran sido  $\{(1, 2), (5, 6), (2, 6), (1, 5), (3, 4)\}$ .

Un resultado importante, se basa en el hecho de que no todos los ciclos observables en un problema de sincronización sobre una red, ya que algunos de ellos pueden ser obtenidos como combinación lineal de otros. Esto lleva al concepto de base de espacio de ciclos, que será tratado en la siguiente sección.

### 3.2. Espacio de Ciclos. Base y Dimensión.

Sea  $G = (V, E)$  un grafo<sup>1</sup>, donde  $V$  representa su conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  con  $|V| = n$  y  $E$  representa su conjunto de aristas  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  con  $|E| = m$ . Es posible definir un espacio vectorial  $\mathcal{V}(G)$  sobre los vértices de  $G$  el campo  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ . Sea  $\mathcal{V}(G)$  el conjunto de todas las funciones de la forma  $\nu : V \rightarrow \mathbb{F}_2$ , esto quiere decir que  $\mathcal{V}(G)$  es el conjunto potencia de  $V$  porque se puede considerar a los elementos de  $\mathbb{F}_2$  como valores de una variable indicadora. Las operaciones  $+$  :  $\mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)$  y  $\cdot$  :  $\mathbb{F}_2 \times \mathcal{V}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)$  son definidas se definen tal que  $\nu_1 + \nu_2 = \nu_1 \Delta \nu_2$  donde  $\Delta$  representa la diferencia simétrica  $(\nu_1 \setminus \nu_2) \cup (\nu_2 \setminus \nu_1)$ ,

<sup>1</sup>La teoría presentada en esta sección se enfoca al caso no dirigido, para referencias al caso dirigido, puede revisarse Liebchen [12]. Sin embargo, el caso no dirigido es suficiente para el cálculo del número de ciclos a considerar en el PSS.



y  $k \cdot \nu$  es igual a  $\nu$  si  $k = 1$  e igual a  $\emptyset$  si  $k = 0$ . Es claro que el elemento neutro es  $\emptyset$  y para cada  $\nu \in \mathcal{V}(G)$  su elemento inverso es el mismo  $\nu$ , es decir  $\nu = -\nu$ . Una base de  $\mathcal{V}(G)$ , de hecho una base canónica, será entonces  $\{ \{ v_1 \}, \{ v_2 \}, \dots, \{ v_n \} \}$  and por lo tanto  $\dim \mathcal{V}(G) = |V| = n$ .

De la misma forma, un espacio de aristas  $\mathcal{E}(G)$  de todas las funciones de la forma  $\mathcal{E} : E \rightarrow \mathbb{F}_2$  puede ser definida sobre el mismo campo  $\mathbb{F}_2$  y bajo las mismas operaciones cerradas  $+$  :  $\mathcal{E}(G) \times \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$ ,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \Delta \varepsilon_2$ , y  $\cdot$  :  $\mathbb{F}_2 \times \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G)$ ,  $k \cdot \varepsilon \in \{ \varepsilon, \emptyset \}$  igual que antes.  $\mathcal{E}(G)$  es por lo tanto el conjunto potencia de  $E$ . Además, una base canónica de este espacio es  $\{ \{ e_1 \}, \{ e_2 \}, \dots, \{ e_m \} \}$  y  $\dim \mathcal{E}(G) = |E| = m$ .

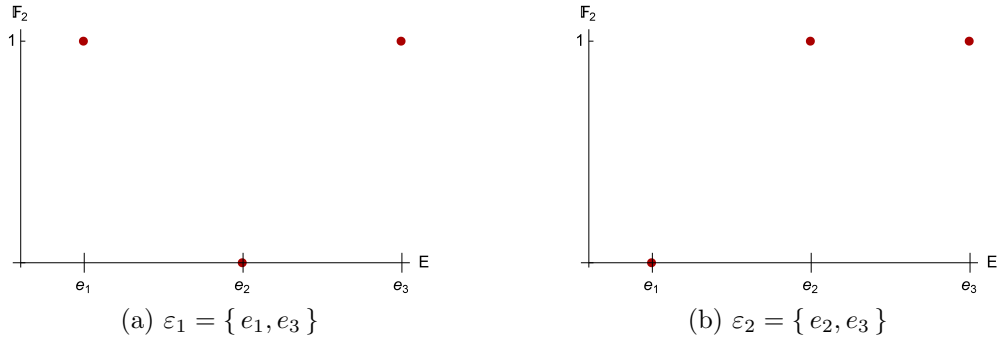


Figura 3.2: Ejemplo de dos funciones en  $\mathcal{E}(G)$  con  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \Delta \varepsilon_2 = \{ e_1, e_2 \}$

Sea  $[k_1, k_2, \dots, k_m]^T$  el vector coordenada  $\varepsilon \in \mathcal{E}(G)$  sobre la base canónica, es decir  $[\varepsilon]_{B(\mathcal{E}(G))} = [k_1, k_2, \dots, k_m]^T$  siempre que  $\varepsilon = k_1 \{ e_1 \} + k_2 \{ e_2 \} + \dots + k_m \{ e_m \}$ . Es posible definir un producto interno entre dos vectores en  $\mathcal{E}(G)$  como  $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = [\varepsilon_1]_{B(\mathcal{E}(G))}^T [\varepsilon_2]_{B(\mathcal{E}(G))} = k_1^1 k_1^2 + k_2^1 k_2^2 + \dots + k_m^1 k_m^2$ . En realidad, este no es un producto interno propiamente dicho porque  $\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle$  puede ser cero aún cuando  $\varepsilon \neq \emptyset$  y por este motivo se lo llama *producto interno indefinido*, ver [8].

En relación al ejemplo de la figura 3.2,  $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = [1, 0, 1][0, 1, 1]^T = 0 + 0 + 1 = 1$ , pero  $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle = [0, 1, 1][0, 1, 1]^T = 0 + 1 + 1 = 0$  aunque  $\varepsilon_2$  es diferente del vector cero  $\emptyset$ . De hecho, se puede verificar que  $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0 \in \mathbb{F}_2$  sí y solo sí  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  tienen un número par de aristas en común.

Existen dos subespacios que son importantes considerar, el *el espacio de ciclos*  $\mathcal{C}(G)$  el cuál es generado por todos los ciclos en  $G$  y el *espacio de cortes*  $\mathcal{C}^*(G)$ , el cual es generado por todos los cortes de  $G$ .

El conjunto formado por cada ciclo inducido en  $G$  genera cualquier espacio  $\zeta$  en  $G$  con un arco  $e$  el cuál une dos vértices en el ciclo  $\zeta$  siendo  $e$  no parte del ciclo (es decir una *cuerda*), esto es debido a que  $\zeta$  contiene dos ciclos  $\zeta_{11}$  y  $\zeta_{12}$  los cuales son de hecho ciclos inducidos de  $G$  con únicamente un arco  $e$  en común, la cuerda. Ambos ciclos son formados por menos aristas de  $\zeta$  y, además,  $\zeta_{11} \Delta \zeta_{12} = \zeta$ . De aquí en adelante solo se referirá a ciclos sin cuerdas.

**Definición 5** (Ciclo fundamental). *Sea  $G = (V, E)$  un grafo conexo con un árbol generador  $T$ . Si un arco que no está en el árbol es agregado, éste produce uno y solamente un ciclo. Este ciclo es llamado ciclo fundamental con respecto a  $T$ .*

Agregando una a una las aristas en  $G \setminus T$ , da como resultado un conjunto de ciclos fundamentales

que generan el espacio de ciclos  $\mathcal{C}(G)$  y que de hecho es un conjunto linealmente independiente.

**Teorema 7.** *El conjunto de ciclos fundamentales de un grafo conexo  $G = (V, E)$  con un árbol generador  $T$ ,  $|V| = n$  y  $|E| = m$ , es una base para el espacio de ciclos  $\mathcal{C}(G)$  con cardinalidad  $m - n + 1$ .*

*Demostración.* Gracias a la definición y construcción de ciclos fundamentales con respecto a un árbol generador fijo  $T$ , ninguno de ellos puede ser obtenido por combinación lineal de los otros, ya que en cada ciclo fundamental  $\zeta_i$  de  $G$  se encontrará una arista  $e$  que no está en ningún otro ciclo  $\zeta_j$ . Esa arista  $e$ , es por supuesto, la que forma el ciclo y que se está en  $G \setminus T$ . Esto prueba la independencia. Además, debido a que cualquier árbol  $T$  en  $G$  tiene  $n - 1$  aristas, habrán  $m - (n - 1)$   $e$ 's que formarán ciclos fundamentales.

Sea  $\zeta_i$  un ciclo fundamental en  $G$  con respecto a  $T$ ,  $e_i$  una arista en  $G \setminus T$  que produce  $\zeta_i$  y  $\zeta$  un ciclo arbitrario en  $\mathcal{C}(G)$ . Es cierto que  $k_1\zeta_1 + k_2\zeta_2 + \dots + k_{m-n+1}\zeta_{m-n+1} = \zeta$ . En efecto, esto sucede porque por un lado  $\zeta$  contiene aristas que están tanto en  $T$  como en  $G \setminus T$ , y por otro lado, se pueden elegir valores de  $k \in \mathbb{F}_2$  tal que la suma vectorial entre los  $k_i\zeta_i$ 's contengan los mismos  $e$ 's que  $\zeta$ , ya que existe únicamente un  $e_i$  en cada  $\zeta_i$  y  $e_i \neq e_j$  para todo  $i \neq j$ , por lo tanto, es cierto que  $k_1\zeta_1 + k_2\zeta_2 + \dots + k_{m-n+1}\zeta_{m-n+1} + \zeta = \emptyset$ , ya que la suma del lado derecho de la expresión es un grafo inducido acíclico y el único ciclo acíclico en  $\mathcal{C}(G)$  es  $\emptyset$ .  $\square$

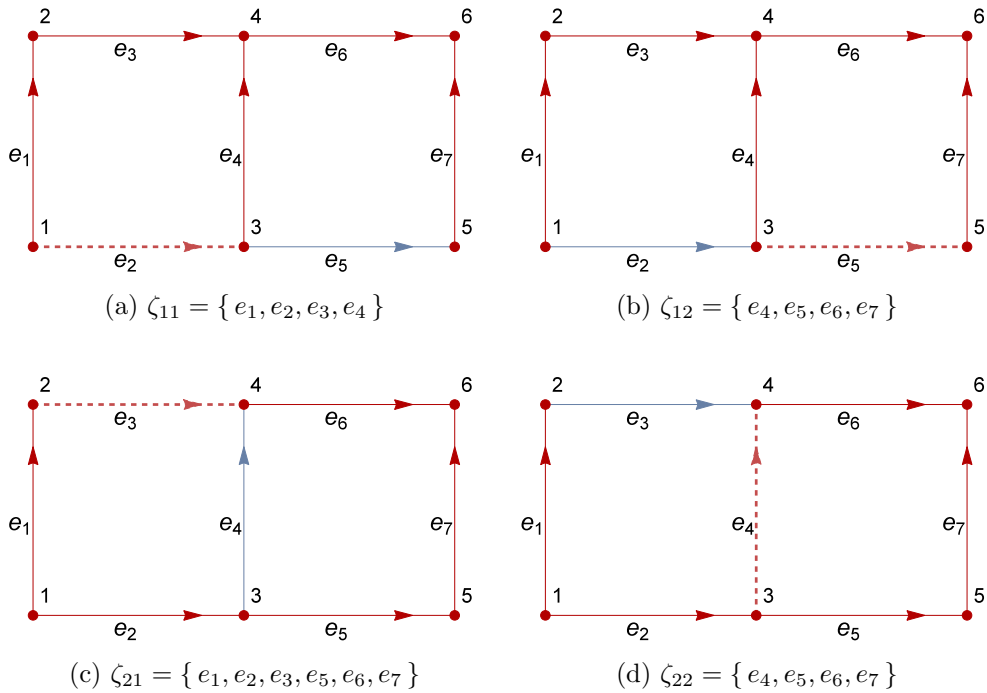


Figura 3.3: Dos árboles generadores y sus ciclos fundamentales.

La figura 3.3 muestra un ejemplo con dos diferentes árboles generadores,  $T_1$  en la figura 3.3a y 3.3b y  $T_2$  en la figura 3.3c y 3.3d. La base del espacio de ciclo  $\mathcal{C}(G)$  con respecto a  $T_1$  es  $\{\zeta_{11}, \zeta_{12}\}$  con respecto a  $T_2$  es  $\{\zeta_{21}, \zeta_{22}\}$ .

El complemento ortogonal de un subespacio  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}(G)$  se define como:

$$\mathcal{F}^\perp = \{ \varepsilon \in \mathcal{E}(G) \mid \forall f \in \mathcal{F}, \langle f, \varepsilon \rangle = 0 \}$$

y  $\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^\perp = m$ .

**Teorema 8.**  $\mathcal{C}(G)$  y  $\mathcal{C}^*(G)$  son ortogonalmente complementarios.

*Demostración.* Sea  $\zeta \in \mathcal{C}(G)$  y  $V_1$  and  $V_2$  tal que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y  $V_1 \cup V_2 = V$ , esta partición de  $V$  se obtiene por el corte  $\zeta^* \in \mathcal{C}^*(G)$ . Hay dos casos a considerar, el primero es cuando  $\zeta$  y  $\zeta^*$  no tienen aristas en común, aquí  $\langle \zeta, \zeta^* \rangle = 0$ , y el segundo es cuando  $\zeta$  y  $\zeta^*$  tienen aristas en común, aquí, debido a que cualquier corte sobre un ciclo tiene un número par de aristas, el número de aristas comunes entre  $\zeta$  y  $\zeta^*$  será también par, y or lo tanto se tiene nuevamente  $\langle \zeta, \zeta^* \rangle = 0$ .  $\square$

Lo anterior implica que  $\dim \mathcal{E}(G) = \dim \mathcal{C}(G) + \dim \mathcal{C}^*(G)$ , y como se sabe que  $\dim \mathcal{E}(G) = m$  y  $\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1$ , entonces es cierto que  $\dim \mathcal{C}^*(G) = n - 1$ .

### 3.3. La restricción de ciclos.

A todos los modelos presentados en el capítulo anterior se le puede agregar un conjunto de restricciones de ciclos (loop) que surgen cuando se trata de modelizar la sincronización de los semáforos sobre una red. La suma de todas las fases relativas  $\phi$  obtenidas entre cada señal cuando un vehículo (o pelotón) pasa a través de un ciclo debe ser un número entero, ya que se desea considerar el hecho que todas las señales trabajan bajo un mismo período común, este es el mismo criterio que se utilizó para definir las restricciones sobre una arteria, en ese caso el ciclo se producía por ir geoméricamente de una señal a otra consecutiva y regresar.

La ecuación tiene la forma general  $\zeta_{loop} = \sum_{i=1}^p \phi_i$ , donde  $p$  es el número de señales en el ciclo y  $\zeta_{loop}$  es un número entero, sin embargo debe considerar lo que se conoce con el nombre de *fases intranodo*, tal como se observa en la figura 3.4 que ha sido tomada desde Gartner y Stamatiadis [17]. Aquí los  $\omega$ 's son los valores de desfase (intranodo) entre cada giro en una esquina del ciclo, los cuales hay que tomar en cuenta coherentemente dentro de la geometría utilizada. Las flechas representan simplemente la dirección de ida sobre una calle de dos vías.

Entonces para cada ciclo, y en referencia al ejemplo de la figura 3.4, la ecuación debe escribirse como:

$$\zeta_{loop} = \phi_{ij} + \omega_{ijk} + \phi_{jk} + \omega_{jkl} + \phi_{kl} + \omega_{kli} + \phi_{li} + \omega_{lij}$$

Para el caso simétrico LM 2.3 la mitad del tiempo de luz roja, en una dirección sobre una señal, es de hecho la mitad del tiempo de luz verde sobre la calle que cruza para formar la intersección y por este motivo, el valor intranodo en cada esquina en el ciclo es  $\frac{1}{2}$ , la mitad del largo del período  $r + g$ , obteniendo así:

$$\zeta_{loop} = \frac{p}{2} + \sum_{i=1}^p \phi_i \quad (3.1)$$

donde  $p$  es el número de intersecciones en el ciclo, el cuál generalmente es cuatro.

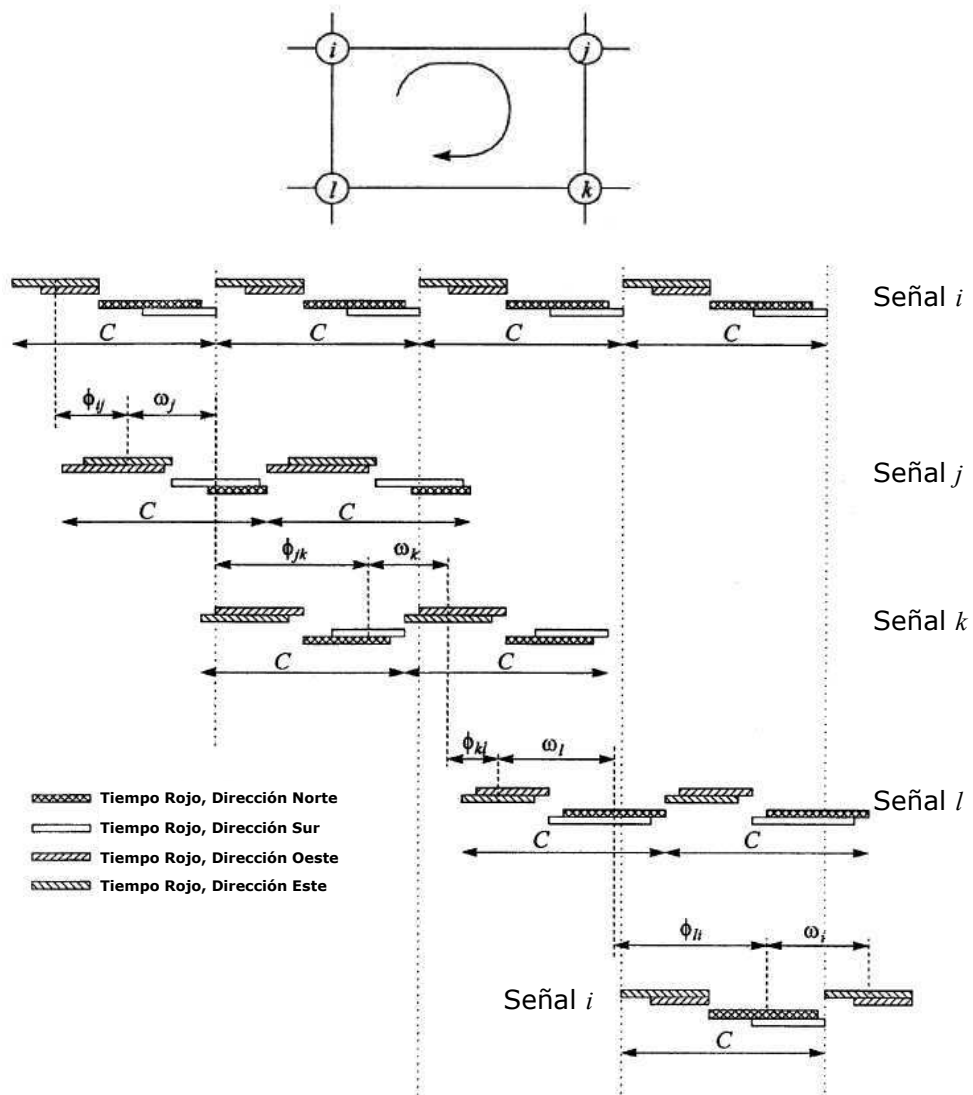


Figura 3.4: Geometría para la sincronización de un ciclo.

Los valores  $\omega$ 's deben ser en realidad fijados por el modelizador, pero deben ser consistentes, en el sentido que representen una configuración real de luces rojas y verdes sobre una intersección, por ejemplo, no deberían ser tales que definan un esquema de luces verdes al mismo tiempo para ambas arterias en el cruce. Esto se evita, si se considera una patrón real de luces sobre una esquina y red de transporte en funcionamiento, aunque a primera instancia no sea óptima, luego el modelo resolverá el problema.

# Capítulo 4

## Aplicación y ejemplos numéricos.

En este capítulo se presentan ejemplos computacionales sobre un segmento de una arteria principal y una red en la ciudad de Guayaquil. Ambos casos tratan de ser una adecuada representación de la realidad, sin embargo algunos datos han sido simulados con propósitos académicos.

### 4.1. Una aplicación para el caso arterial.

Para el caso arterial se ha utilizado un tramo de la AV. Juan Tanca Marengo de Guayaquil, ver figura 4.1. Esta elección se ha hecho debido a que esta es una arteria de dos vías muy importante, ya que une el sector norte con el sector noroeste, pasando por la ciudadela Marta de Roldos, El Colegio Americano de Guayaquil y por otros puntos importantes de la zona. La avenida llega hasta la intersección de la Vía a Daule, lo que implica un fuerte ingreso vehicular hacia la arteria.

Se han ubicado 6 semáforos dispuestos a una distancia que se encuentra en azul en la figura 4.1 y en la tabla 4.1. El resto de datos de entrada han sido establecidos en base a datos tanto reales como simulados, como se verá en lo que sigue de esta sección.

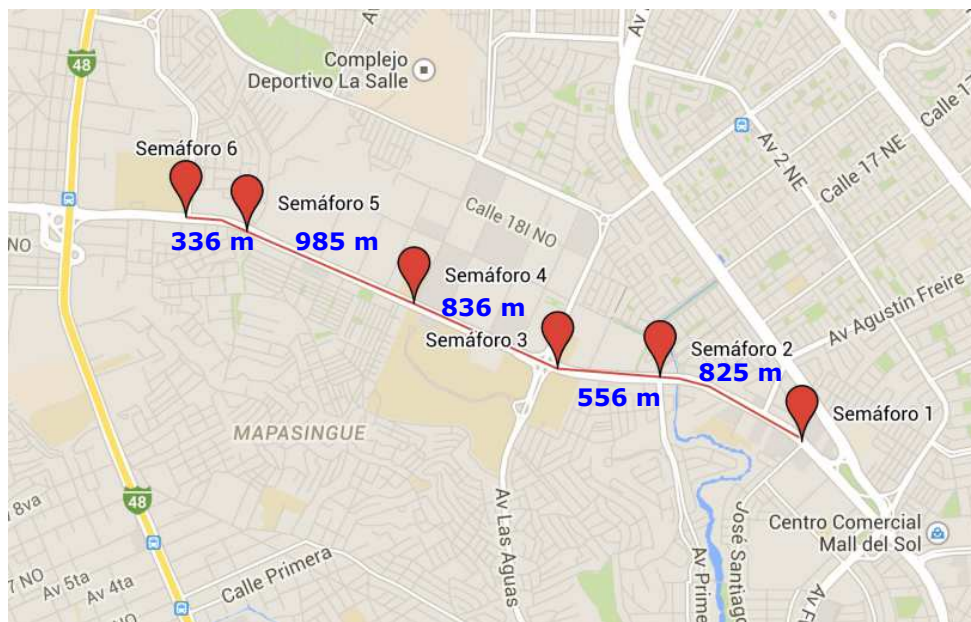


Figura 4.1: Un Sector de la Avenida Juan Tanca Marengo. Guayaquil-Ecuador.

Los ejemplos a continuación han sido resueltos utilizando los procedimientos SEB y SUB, los cuales han sido programados utilizando *MATLAB*<sup>®</sup> *R2013a*.

Tabla 4.1: Datos de entrada. Av. Juan Tanca Marengo.

Semáforo( <i>i</i> )-Semáforo( <i>j</i> )	Distancia (metros)	velocidad (ida y regreso) (m/seg)
1-2	825	16,7
2-3	556	16,7
3-4	836	16,7
4-5	985	16,7
5-6	336	16,7
Total	3538	16,7

En un primer ejemplo, las velocidades tanto en la dirección de ida como en la de venida, han sido fijadas en 60 km/hora lo que equivale a 16,7 metros/segundos aproximadamente, esto en base a los límites de velocidad que regulan el tránsito en la Av. Juan Tanca Marengo, ver figura 4.2. El largo de periodo en 90 segundos y los tiempos de luces rojas para cada señal, en unidades de ciclo, están dadas por el vector [0,40, 0,42, 0,43, 0,42, 0,42, 0,44].



Figura 4.2: Límites de Velocidad en Guayaquil. Tomado de [19].

Los valores de los  $\theta$ 's obtenidos, luego de aplicar el procedimiento SEB son  $\theta's = [0,5, 0, 0,5, 0, 0,5, 0]$ , siendo la señal crítica de base la número 6 (maximizador del bandwidth), es decir que esta señal se considera el origen para ubicar el resto de señales a las distancias  $\theta$ 's. Estos valores se utilizan para graficar el diagrama espacio-tiempo de la figura 4.3. El valor de bandwidth, que es el mismo en este caso para ambas direcciones es  $b = 0,32345$  ciclos ó 29,1150 segundos.

Las líneas horizontales en el diagrama espacio tiempo de la figura 4.3, representan los tiempos de luces rojas que no se deberían cruzar con el intervalo de tiempo del bandwidth, que se aprecia con líneas paralelas. Aquellas con pendiente positiva son en dirección de ida, y con pendiente negativa de venida. Por simplicidad se han graficado solo un bandwidth de cada tipo, pero la sincronización hace que después de cada tiempo rojo una banda verde puede ser ubicada en ambas direcciones.

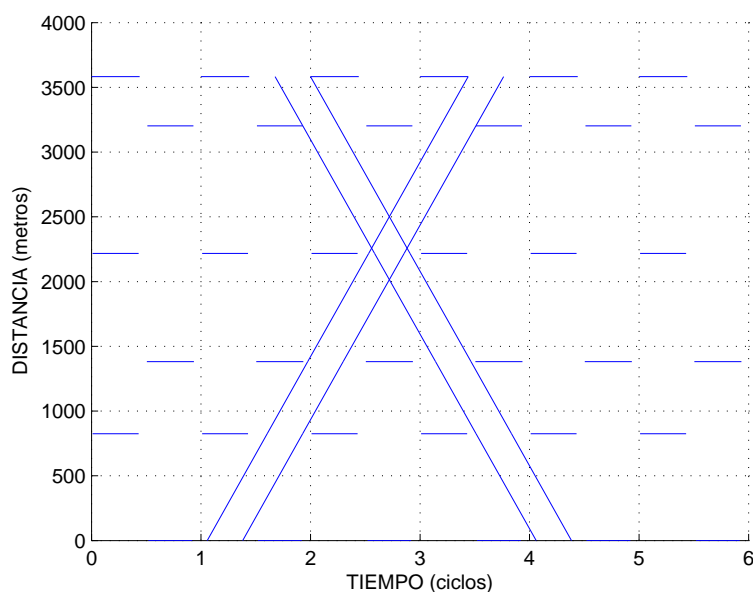


Figura 4.3: Sincronización. Caso Arterial. Ejemplo 1.  $P = \bar{P}$ .

Con un pequeño cambio en el tamaño del periodo de  $T = 90$  segundos a  $T = 60$  segundos la sincronización cambia como se nota en la figura 4.4. El bandwidth total en este caso disminuyó a  $b = 0,2068$  y los valores de  $\theta$ , cambiaron a  $\theta's = [0, 0,5, 0, 0, 0, 0,5]$ , aunque esta vez la señal de base es la número 1. Esto implica que una reducción del tiempo en el periodo  $T$ , lo que equivale a disminuir el tiempo de luces rojas, produce un ancho de banda verde menor.

Si se establece que la dirección de ida es la que va desde la señal 1 a la 6 y cambiando las reglas del juego al considerar que los pelotones en ambas direcciones no son iguales, por ejemplo  $P = 0,3$  ciclos y  $\bar{P} = 0,1$  ciclos, y manteniendo el largo del periodo en 90 segundos, se obtiene diferentes valores del bandwidth en las direcciones contrarias. En este ejemplo se logra  $b = 0,4852$  y  $\bar{b} = 0,1617$ , es decir  $b + \bar{b} = 0,6469$ , que como se esperaba, es igual a  $2b = 2(0,32345)$  del primer caso presentado. Aquí además se tiene  $\theta's = [0,4744, 0, 0,3782, 0,9394, 0,5, 0,8383]$ , ver figura 4.5.

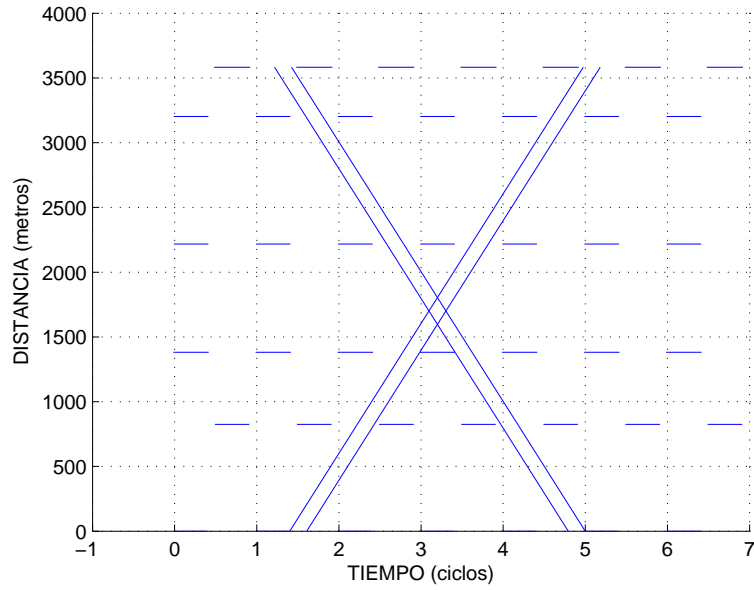


Figura 4.4: Sincronización. Caso Arterial. Ejemplo 2.  $P = \bar{P}$ .

Aunque el ancho de las líneas paralelas en la dirección de ida es más amplio que en las de venida, en ambos casos los pelotones han sido acomodados para que crucen la avenida sin detenerse, favoreciendo a aquel grupo de vehículos con una largo mayor.

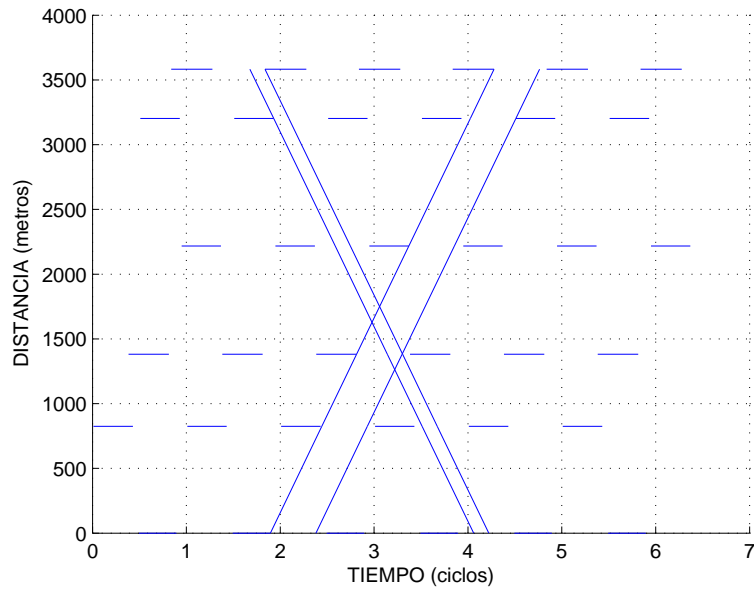


Figura 4.5: Sincronización. Caso Arterial. Ejemplo 3.  $P \neq \bar{P}$ .

El cambiar las velocidades sobre la arteria, lo cual tiene sentido en diferentes sectores del tramo, a diferentes horas del día, el resultado, con los mismos datos anteriores puede ser visto en la figura 4.6. Aquí las velocidades fueron establecidas como  $[18,0, 14,0, 16,8, 11,3, 12,1]$  y  $[17,8, 0,8968, 0,3331, 0,8314, 0,8682, 0,0435]$  entre las señales en la dirección de ida y venida



respectivamente. Los bandwidths encontrados fueron  $b = 0,3954$  y  $\bar{b} = 0,1318$ , por lo tanto  $b + \bar{b} = 0,5272$ . Además  $\theta^i s = [0,3976, 0,8968, 0,3331, 0,8314, 0,8682, 0,0435]$  en referencia a la señal 5.

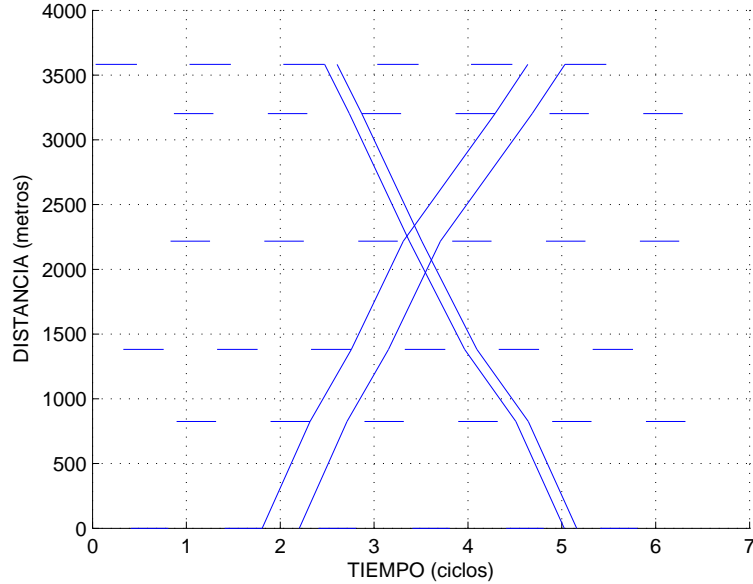


Figura 4.6: Sincronización. Caso Arterial. Ejemplo 4.  $P \neq \bar{P}$ .

## 4.2. Una aplicación para el caso sobre una red.

La configuración en manzanas que tiene Guayaquil, permite formar un grid graph sobre calles. El sector elegido para este ejemplo es el ubicado en pleno centro de la urbe, en los alrededores de un segmento de la avenida principal de la ciudad, Av. 9 de Octubre. Los datos de distancia entre las calles aledañas se pueden ver en la figura 4.7.

Se ha supuesto que todas las calles son de dos vías (en este tramo la Av. 9 de Octubre, ciertamente lo es) con propósito académico para analizar el caso simétrico, esta condición puede ser fácilmente eliminada para casos más generales simplemente restringiendo  $\bar{b} = 0$ .

Para correr el ejemplo, se ha utilizado el modelo LM 2.3, el cual es el caso simétrico, es decir, se ha supuesto bandwidths iguales en las direcciones de ida y regreso sobre las calles. No se ha incluido la restricción correspondiente al cambio de velocidades entre aristas consecutivas sobre una misma arteria, pero sí se ha puesto un límite de velocidad en cada arista. El límite inferior y superior para el largo del periodo  $T$  se ha establecido en 60 y 92 segundos respectivamente.

Se ha agregado además las restricciones de ciclos correspondiente a un árbol generador fijo. El número de estas restricciones es  $m - n + 1 = 24 - 16 + 1 = 9$ , donde  $m$  es el número de aristas en el grid graph y  $n$  el número de vértices.

Sobre cada esquina del grid graph de la figura 4.7 se supone existe un semáforo y se han fijado valores de tiempos de luces rojas en cada uno de ellos de 0,5 segundos, con el fin de que los intranodos  $\omega$ 's sean todos iguales a 0.5 en cada intersección. Los límites de velocidad sobre

cada arteria pueden verse en la tabla 4.2 y han sido generadas aleatoriamente bajo una distribución uniforme  $U(12, 16)$ , con el fin de considerar un caso donde se suponga alto flujo vehicular.



Figura 4.7: Un Sector del centro de Guayaquil. Los números azules representan los nombres de las esquinas del grid-graph  $4 \times 4$  y los números en negro las distancias entre las aristas del grafo.

Tabla 4.2: Cotas inferiores y superiores para límites de velocidad.

Arteria	Límite inferior (metros/segundos)	Límite superior (metros/segundos)
1-4	13.3188	15.5974
5-8	13.9431	15.9753
9-12	13.0441	15.0982
13-16	13.8135	15.0122
1-13	13.4120	15.5633
2-14	12.6920	15.6559
3-15	13.8978	15.7656
4-16	12.8305	15.8014

La función objetivo es simplemente  $\sum_{(i,j) \in Arterias} b(i,j)$ , donde *Arterias* es el conjunto que contiene todas las arterias consideradas en el análisis, las cuales son simplemente las columnas y filas el grid graph del grafo formado en la figura 4.7. El modelo lineal completo, puede observarse en el apéndice B y se ha ejecutado utilizando el motor de optimización XPRESS [10].

Tabla 4.3: Resultados. Bandwidths y velocidades

Arteria	Bandwidth (ciclos)	velocidad (metros/segundos)
1-4	0.32369	15.5974
5-8	0.32922	15.9753
9-12	0.32362	15.0982
13-16	0.32261	15.0122
1-13	0.32679	15.5633
2-14	0.33337	15.6559
3-15	0.33660	15.7656
4-16	0.33904	15.8014

Note que las velocidades obtenidas son las mismas que los límites superiores impuestos como entradas del modelo. Estos resultados puede implicar un estudio más profundo en la velocidad impuesta a los vehículos, que considere funciones de tráfico u otros parámetros que influyan en el flujo del transporte.

El largo del periodo  $1/z$  obtenido es: 91.9997 segundos.

Todos los valores de  $\phi(i, j)$  para cada arista en la figura 4.7 fueron: 0. Esto significa que la sincronización se logra ubicando las mitades de los tiempos de rojo completamente alineados.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Recomendaciones.

### 5.1. Conclusiones.

Los modelos lineales, como se ha visto pueden ser utilizados para resolver problemas reales, pero hay que acotar, que aún en nuestros días, debido al gran número de variables enteras utilizadas, el esfuerzo computacional es muy grande, en particular en el caso de sincronización sobre una red. Esto puede notarse cuando se trata de correr tan solo el modelo simétrico, sin considerar giros a la izquierda sobre un grid graph de dimensiones mayores a  $7 \times 7$ . Incluso sin las restricciones de ciclos, la solución óptima puede tomar mucho tiempo.

Los giros a la izquierda presentados en el modelo MAXBAND, hacen de éste muy versátil, sin embargo su aplicación depende de una coherente determinación de los tiempo de luces rojas dentro del largo de un periodo común. De hecho, en las primeras versiones del MAXBAND que concluyeron con un software del mismo nombre, se da como entrada del modelo los valores  $l$  y  $\bar{l}$  siempre que cumplan ciertas condiciones que se dan en realidad cuando los datos son tomados desde configuraciones reales en una intersección.

En la revisión de la literatura se puede observar, como la mayor parte de los autores se enfocan en el caso arterial, incluso aún en años recientes. Esto puede ser debido a la ya mencionada complejidad del problema. El caso sobre una arteria que incluya análisis de giro a la izquierda y algunos pocos ciclos puede ser manejado con eficiencia con los modelos lineales.

De acuerdo a nuestro estudio, el enfoque de solución del PSS más utilizado, es el de maximizar el bandwidth, sin embargo el software comercial de mayor éxito TRANSYT [15], utiliza el enfoque de minimizar alguna función de desempeño de la red, como el tiempo de espera de un pelotón debido a una luz roja, considerando factores de tránsito, entre otros índices.

Los modelos presentados en el capítulo 2, ciertamente no son los únicos, sin embargo enmarcan muy bien el desarrollo de otras aproximaciones en esta área. Un caso, es la variación del modelo MAXBAND donde los bandwidths se consideran distintos en cada arista que une dos esquinas en una arteria. Los resultados que muestra este enfoque producen, en algunos ejemplos, un mayor bandwidth total comparado con el tratamiento tradicional, ver [17].

## 5.2. Recomendaciones.

En todos los modelos presentados, un parámetro de entrada son los tiempos de luces rojas en cada señal, y una pregunta a responder es, qué tan posible es considerarlas como variables. Para el caso arterial, la respuesta es trivial, ya que al tratar de maximizar el bandwidth se debería dejar todos los semáforos en verde durante todo el tiempo posible, pero con el propósito de que las calles o avenidas que la cruzan tengan tiempo para permitir el paso vehicular, un valor fijo de tiempo rojo puede ser establecido. El caso sobre una red, merece un análisis mucho más profundo.

Existen enfoques heurísticos para resolver el problema. Uno de ellos se puede ver en [17] donde se propone separar el problema sobre una red en unos más pequeños sin ciclos, priorizando una arteria principal, para luego utilizar los resultados de los valores de las variables enteras sobre la red completa. Sin embargo los ejemplos presentados son de talla muy pequeña y no se reporta resultados computacionales más complejos. Se recomienda entonces explorar estos casos. TRANSYT [15], de hecho, utiliza algunos procedimientos heurísticos y de simulación para alcanzar una solución aproximada a los problemas.

Se conoce que la base fundamental de ciclos no es la única base que puede ser obtenida en el grafo. Gracias en gran parte al trabajo de Liebchen y Rizzi [12], [13], es posible caracterizar distintos tipos de bases. Un estudio importante sería analizar el impacto que las diferentes clases de bases tienen sobre la formulación lineal del problema de sincronización. Esto tiene sentido al saber que las distintas bases podrían utilizar una cantidad diferente de aristas y por lo tanto, afectar positiva o negativamente al número de variables utilizadas en el modelo. Hay algoritmos que permiten encontrar bases de ciclos sobre un grafo, una referencia se puede encontrar en Mehlhorn [11] y Galbiati [14].

Se sugiere además, analizar cotas sobre las variables enteras, esto con el fin de crear cortes que minimicen el número de iteraciones que los programas computacionales de optimización utilizan en el procedimiento de ramificar y acotar.

# Bibliografía

- [1] Alexander Schrijver, *Theory of linear and integer programming*. First Edition (1986), John Wiley & Sons.
- [2] John T. Morgan and John D. C. Little. *Synchronizing traffic signals for maximal bandwidth*. Operations Research, Vol. 12, No. 6, Special Transportation Science Issue (1964), pp. 896-912.
- [3] John D. C. Little. *The synchronization of traffic signals by mixed-integer linear programming*. Operations Research, Vol. 14, No. 4 (1966), pp. 568-594.
- [4] N. H. Gartner, D. C. Little, H. Gabbay. *Optimization of traffic signal settings by mixed-integer linear Programming; part I: The network coordination problem; part II: The network synchronization problem*. Transportation Science 9, (1975), pp. 321-363.
- [5] D. C. Little, M. D. Kelson, N.H. Gartner, *MaxBand: A versatile program for setting signal on arteries and triangular networks*. Transportation Research Record (1980), 795, 40.
- [6] G. Wünsch. *Coordination of traffic signals in networks*. Technische Universität Berlin. PhD thesis (2008).
- [7] Reinhard Diestel. *Graph theory*. Third Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer (2000).
- [8] Ryan Hotovy, David R. Larson and Sam Scholze. *Binary frames*. Unpublished REU notes (2011).
- [9] Wolfram Research, Inc., *Mathematica, Version 10.0*. Champaign, IL (2014)
- [10] Fair Isaac Corporation., *FICO Xpress*. (2014).
- [11] Kurt Mehlhorn and et al. *Minimum cycle bases, algorithm and applications*. <https://people.mpi-inf.mpg.de/mehlhorn/ftp/MFCS07.pdf>. Ultimo acceso: Enero 2015.
- [12] T. Kavitha, C. Liebchen, K. Mehlhorn, D. Michail, R. Rizzi, T. Ueckerdt, K. Zweig. *Cycle bases in graphs: Characterization, algorithms, complexity and applications*. Computer Science Review, Vol. 3, Issue 4 (2009), pp. 199-243.
- [13] Christian Liebchen and Romeo Rizzi. *Classes of cycle bases*. Discrete Applied Mathematics. Elsevier. (2006).
- [14] Giulia Galbiati. *On finding cycle bases and fundamental cycle bases with a shortest maximal cycle*. Information Processing Letters. Elsevier. (2003).

- [15] Cohen S.L. *Concurrent use of MAXBAND and TRANSYT signal timing programs for Arterial Signal Optimization*. Transportation Research Record, Vol. 906, pp. 81-84, (1983).
- [16] INEC. *Instituto Nacional de Estadísticas y Censos*.  
<http://www.ecuadorencifras.gob.ec/censo-de-poblacion-y-vivienda/>. Censo de Población 2010. Ultimo acceso: Abril 2015.
- [17] Gartner, N. H. and Stamatiadis, C. *Progression optimización featuring arterial and route-based priority signal networks* Intelligent Transportation System, Copyright Taylor and Francis Inc. (2004).
- [18] Essam H. Almasri. *Signal coordination for saving energy and reducing congestion using TRANSYT-7F Model and Its Application in Gaza City* Natural Resources, (2014).
- [19] Noticias de Ecuador. *Límites de velocidad en Guayaquil*.  
<http://ecuadorecuatoriano.blogspot.co.uk/2012/08/limites-de-velocidad-en-guayaquil.html>. Ultimo acceso: Abril 2015.

# Apéndice A

## Ejemplos para el caso arterial.

```
>> C=65;
xp=[0,550,1250,2350,3050,3850,4500,4900,5600,6050];
r=[0.47,0.40,0.40,0.47,0.48,0.42,0.40,0.40,0.40,0.42];
ov=[50,50,50,50,50,50,50,50,50,50]; iv=[50,50,50,50,50,50,50,50,50,50];

>> [SthetaP,OB,IB,c,alpha] = STLEBP(C,r,xp,ov,iv,OP,OP)
SthetaP = [0.5,0,0,0.5,0.5,0,0,0,0.5,0.5]

OB = 0.2342  IB = 0.2342
```

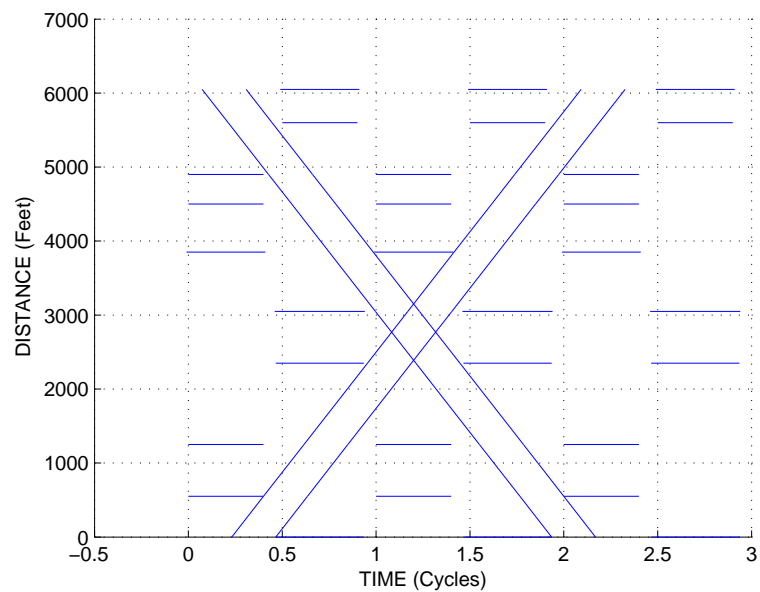


Figura A.1: Sincronización de semáforos. Avenida en Cleveland.  $P = \bar{P}$



```

>> C=65;
xp=[0,550,1250,2350,3050,3850,4500,4900,5600,6050];
r=[0.47,0.40,0.40,0.47,0.48,0.42,0.40,0.40,0.40,0.42];
ov=[50,50,50,50,50,50,50,50,50];
iv=[50,50,50,50,50,50,50,50,50];
OP=0.30;
IP=0.10;

>> [SthetaP,OB,IB,c,alpha] = STLEBP(C,r,xp,ov,iv,OP,IP)
SthetaP = [0.5,0.8829,0,0.4017,0.5,0.8883,0,0,0.4367,0.5]

OB = 0.3513    IB = 0.1171

alpha = [0,0.1171,0,0.0983,0,0.1117,0,0,0.06333,0]

```

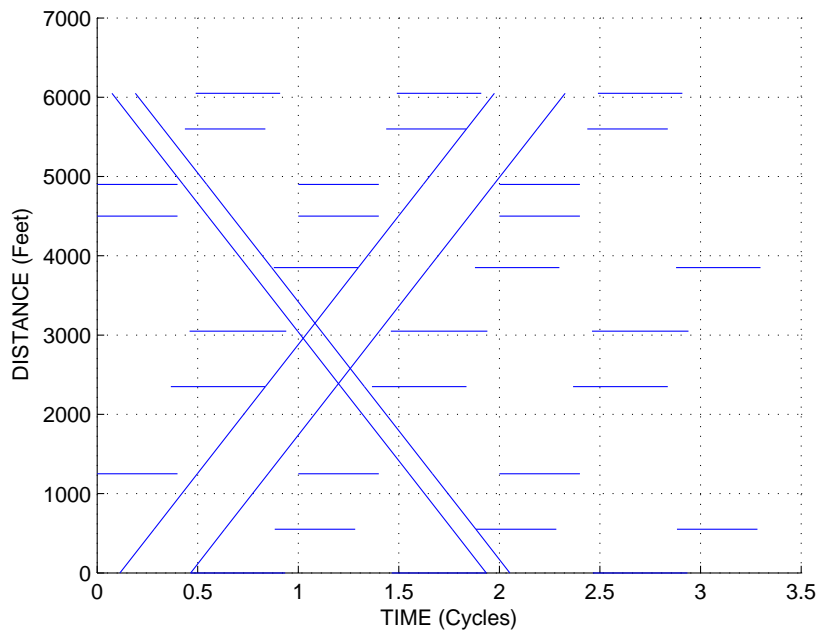


Figura A.2: Sincronización de semáforos. Avenida en Cleveland.  $P \neq \bar{P}$

```

>> C=65;
xp=[0,550,1250,2350,3050,3850,4500,4900,5600,6050];
r=[0.47,0.40,0.40,0.47,0.48,0.42,0.40,0.40,0.40,0.42];
ov=[50,20,50,50,100,50,10,50,30];
iv=[50,20,5,50,28,50,120,50,20];
OP=0.30;
IP=0.10;

>> [SthetaP,OB,IB,c,alpha] = STLEBP(C,r,xp,ov,iv,OP,IP)
SthetaP = [0.879,0,0.5,0.926,0.976,0.289,0.318,0.101,0.101,0.543]

OB = 0.3606   IB = 0.1202

alpha = [0.1202,0,0,0.0510,0,0.0293,0,0,0,0]

```

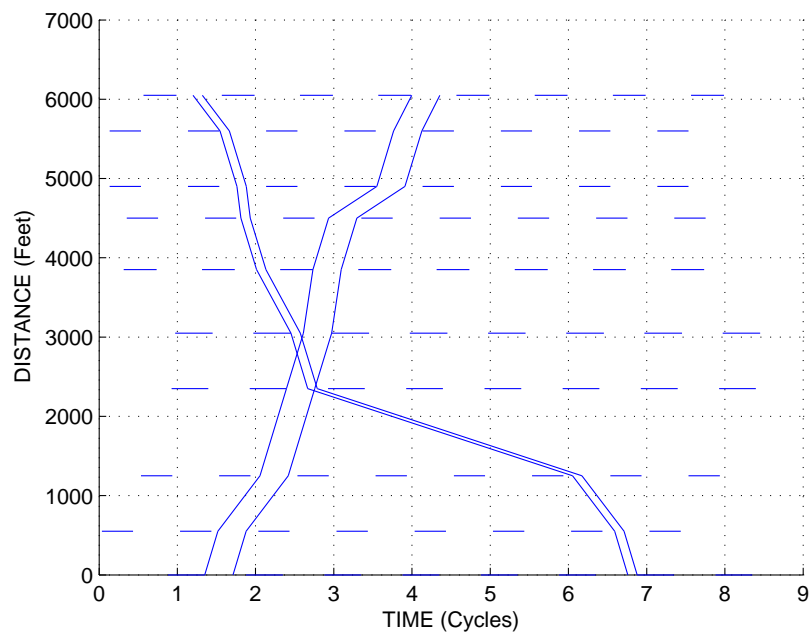


Figura A.3: Sincronización de semáforos. Avenida en Cleveland.  $P \neq \bar{P}$  y diferentes velocidades.

# Apéndice B

## Modelo lineal. Caso sobre una red.

```
MAXIMIZAR FO=b("1,4")+1*(b("5,8")+b("9,12")+b("13,16")+b("1,13")
+b("2,14")+b("3,15")+b("4,16"))
z<=1/60
z>=1/92
u("1,4")<=(1/13.3188)*z
(1/15.5974)*z<=u("1,4")
w("1,4",1)-w("1,4",2)+110*u("1,4")=0.5*m(1,2)-0.5*(0.)
w("1,4",1)+b("1,4")<=0.5
w("1,4",2)-w("1,4",3)+72*u("1,4")=0.5*m(2,3)-0.5*(0.)
w("1,4",2)+b("1,4")<=0.5
w("1,4",3)-w("1,4",4)+71*u("1,4")=0.5*m(3,4)-0.5*(0.)
w("1,4",3)+b("1,4")<=0.5
w("1,4",4)+b("1,4")<=0.5
u("5,8")<=(1/13.9431)*z
(1/15.9753)*z<=u("5,8")
w("5,8",5)-w("5,8",6)+113*u("5,8")=0.5*m(5,6)-0.5*(0.)
w("5,8",5)+b("5,8")<=0.5
w("5,8",6)-w("5,8",7)+66*u("5,8")=0.5*m(6,7)-0.5*(0.)
w("5,8",6)+b("5,8")<=0.5
w("5,8",7)-w("5,8",8)+72*u("5,8")=0.5*m(7,8)-0.5*(0.)
w("5,8",7)+b("5,8")<=0.5
w("5,8",8)+b("5,8")<=0.5
u("9,12")<=(1/13.0441)*z
(1/15.0982)*z<=u("9,12")
w("9,12",9)-w("9,12",10)+103*u("9,12")=0.5*m(9,10)-0.5*(0.)
w("9,12",9)+b("9,12")<=0.5
w("9,12",10)-w("9,12",11)+67*u("9,12")=0.5*m(10,11)-0.5*(0.)
w("9,12",10)+b("9,12")<=0.5
w("9,12",11)-w("9,12",12)+75*u("9,12")=0.5*m(11,12)-0.5*(0.)
w("9,12",11)+b("9,12")<=0.5
w("9,12",12)+b("9,12")<=0.5
u("13,16")<=(1/13.8135)*z
(1/15.0122)*z<=u("13,16")
w("13,16",13)-w("13,16",14)+99*u("13,16")=0.5*m(13,14)-0.5*(0.)
w("13,16",13)+b("13,16")<=0.5
```

$w("13,16",14)-w("13,16",15)+71*u("13,16")=0.5*m(14,15)-0.5*(0.)$   
 $w("13,16",14)+b("13,16")\leq 0.5$   
 $w("13,16",15)-w("13,16",16)+75*u("13,16")=0.5*m(15,16)-0.5*(0.)$   
 $w("13,16",15)+b("13,16")\leq 0.5$   
 $w("13,16",16)+b("13,16")\leq 0.5$   
 $u("1,13")\leq (1/13.412)*z$   
 $(1/15.5633)*z\leq u("1,13")$   
 $w("1,13",1)-w("1,13",5)+90*u("1,13")=0.5*m(1,5)-0.5*(0.)$   
 $w("1,13",1)+b("1,13")\leq 0.5$   
 $w("1,13",5)-w("1,13",9)+81*u("1,13")=0.5*m(5,9)-0.5*(0.)$   
 $w("1,13",5)+b("1,13")\leq 0.5$   
 $w("1,13",9)-w("1,13",13)+77*u("1,13")=0.5*m(9,13)-0.5*(0.)$   
 $w("1,13",9)+b("1,13")\leq 0.5$   
 $w("1,13",13)+b("1,13")\leq 0.5$   
 $u("2,14")\leq (1/12.696)*z$   
 $(1/15.6559)*z\leq u("2,14")$   
 $w("2,14",2)-w("2,14",6)+82*u("2,14")=0.5*m(2,6)-0.5*(0.)$   
 $w("2,14",2)+b("2,14")\leq 0.5$   
 $w("2,14",6)-w("2,14",10)+81*u("2,14")=0.5*m(6,10)-0.5*(0.)$   
 $w("2,14",6)+b("2,14")\leq 0.5$   
 $w("2,14",10)-w("2,14",14)+77*u("2,14")=0.5*m(10,14)-0.5*(0.)$   
 $w("2,14",10)+b("2,14")\leq 0.5$   
 $w("2,14",14)+b("2,14")\leq 0.5$   
 $u("3,15")\leq (1/13.8978)*z$   
 $(1/15.7656)*z\leq u("3,15")$   
 $w("3,15",3)-w("3,15",7)+79*u("3,15")=0.5*m(3,7)-0.5*(0.)$   
 $w("3,15",3)+b("3,15")\leq 0.5$   
 $w("3,15",7)-w("3,15",11)+80*u("3,15")=0.5*m(7,11)-0.5*(0.)$   
 $w("3,15",7)+b("3,15")\leq 0.5$   
 $w("3,15",11)-w("3,15",15)+78*u("3,15")=0.5*m(11,15)-0.5*(0.)$   
 $w("3,15",11)+b("3,15")\leq 0.5$   
 $w("3,15",15)+b("3,15")\leq 0.5$   
 $u("4,16")\leq (1/12.8305)*z$   
 $(1/15.8014)*z\leq u("4,16")$   
 $w("4,16",4)-w("4,16",8)+78*u("4,16")=0.5*m(4,8)-0.5*(0.)$   
 $w("4,16",4)+b("4,16")\leq 0.5$   
 $w("4,16",8)-w("4,16",12)+79*u("4,16")=0.5*m(8,12)-0.5*(0.)$   
 $w("4,16",8)+b("4,16")\leq 0.5$   
 $w("4,16",12)-w("4,16",16)+77*u("4,16")=0.5*m(12,16)-0.5*(0.)$   
 $w("4,16",12)+b("4,16")\leq 0.5$   
 $w("4,16",16)+b("4,16")\leq 0.5$   
 $-m(12,16)-m(8,12)-m(4,8)-m(3,4)+m(3,7)+m(7,11)+m(11,15)+m(15,16)=2*c161284371115-4$   
 $-m(11,15)-m(7,11)-m(3,7)-m(2,3)+m(2,6)+m(6,10)+m(10,14)+m(14,15)=2*c151173261014-4$   
 $-m(10,14)-m(6,10)-m(2,6)-m(1,2)+m(1,5)+m(5,9)+m(9,13)+m(13,14)=2*c14106215913-4$   
 $-m(8,12)-m(4,8)-m(3,4)+m(3,7)+m(7,11)+m(11,12)=2*c12843711-4$   
 $-m(7,11)-m(3,7)-m(2,3)+m(2,6)+m(6,10)+m(10,11)=2*c11732610-4$   
 $-m(6,10)-m(2,6)-m(1,2)+m(1,5)+m(5,9)+m(9,10)=2*c1062159-4$   
 $-m(4,8)-m(3,4)+m(3,7)+m(7,8)=2*c8437-4$

$$\begin{aligned} -m(3,7)-m(2,3)+m(2,6)+m(6,7) &= 2*c7326-4 \\ -m(2,6)-m(1,2)+m(1,5)+m(5,6) &= 2*c6215-4 \end{aligned}$$